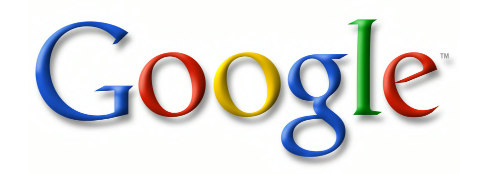








LEHRBUCH

DER

HÖHEREN MECHANII

VON

AUGUST RITTER, Dr. phil.,

GEH. REG.-RATH UND PROFESSOR AN DER KGL TECHN. HOCHSCHULE
ZU AACHEN.

DRITTE AUFLAGE.

ERSTER THEIL.

ANALYTISCHE MECHANIK.

MIT 224 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG, 1899.

BAUMGÄRTNER'S BUCHHANDLUNG.

LEHRBUCH

DER

ANALYTISCHEN MECHANIK

VON

A. RITTER, Dr. PHIL.,

GEH. REG.-RATH U. PROFESSOR AN DER KGL. TECHN. HOCHSCHULE ZU AACHEN.

DRITTE AUFLAGE.

MIT 224 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG, 1899.

BAUMGÄRTNER'S BUCHHANDLUNG.

Vorrede zur ersten Auflage.

Die Mechanik wird an der polytechnischen Schule zu Aachen in zwei Jahrescursen vorgetragen. Der erste Cursus umfasst diejenigen Gebietstheile der Mechanik, welche ohne Hülfe der Differenzial- und Integral-Rechnung bearbeitet werden können; der zweite Cursus ist den Untersuchungen der höheren Mechanik gewidmet. Für die Vorträge des ersten Cursus diente bisher des Verfassers „Lehrbuch der technischen Mechanik" als Grundlage. Das „Lehrbuch der höheren Mechanik", von welchem der erste Theil unter dem Titel: „Lehrbuch der analytischen Mechanik" hiermit erscheint, wird in gleicher Weise das Vortragsgebiet des zweiten Cursus behandeln und wird, das eben genannte elementare Lehrbuch ergänzend, vorzugsweise diejenigen Abschnitte der Mechanik berücksichtigen, welche wegen vorauszusetzender Vorkenntnisse aus der höheren Mathematik von dem Gebiete der elementaren Mechanik ausgeschlossen werden mussten.

Das „Lehrbuch der analytischen Mechanik" enthält diejenigen vorwiegend theoretischen Untersuchungen, welche nach den Erfahrungen des Verfassers vorzugsweise geeignet erschienen, den studirenden Techniker mit den Anwendungen der höheren Mathematik vertraut zu machen, ihm einen Ueberblick über das ganze Gebiet der theoretischen Mechanik zu geben, insbesondere das hochwichtige Verständniss der allgemeinen Principien der Mechanik ihm zu eröffnen. Es enthält etwa das Minimum dessen, was nach Ansicht des Verfassers jeder wissenschaftlich gebildete Techniker von der analytischen Mechanik wissen sollte. Das Streben des Verfassers war weniger darauf gerichtet, die Wissenschaft durch neue Untersuchungen zu bereichern, als vielmehr: in zweckmässiger Auswahl, übersichtlicher Anordnung des Lehrstoffs und klarer Darstellung desselben denjenigen Anforderungen zu genügen, welche

an ein speciell für studirende Techniker bestimmtes Lehrbuch gestellt werden können.

Der demnächst erscheinende zweite Theil wird unter dem Titel: „Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik" in der Stärke von etwa dreissig Druckbogen eine Auswahl derjenigen Untersuchungen enthalten, deren Resultate bei den Fachstudien der Ingenieur-Wissenschaften zur Anwendung kommen.

Aachen, den 22. Februar 1873.

A. Ritter.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Im dritten Kapitel sind die beiden Paragraphen 11 und 12 neu hinzugekommen, enthaltend die Ableitung der Gleichungen des Beschleunigungscentrums und der beiden Bresse'schen Kreise.

Am Schlusse des neunten Kapitels ist der § 54 hinzugefügt, enthaltend die Theorie der Bewegung eines materiellen Punktes längs der Sehne einer homogenen Kugel.

Im zehnten Kapitel ist die Theorie der relativen Bewegung eines materiellen Punktes in Bezug auf die rotirende Erdkugel neu bearbeitet und erweitert worden.

Im Anschlusse an die Theorie der Kräfte-Functionen ist in § 76 das Potential einer homogenen Kugel berechnet worden.

Im zwölften Kapitel ist der § 82 neu hinzugekommen, enthaltend die Anwendung der für die Bewegung einer geradlinigen Kette von materiellen Punkten gefundenen Gleichungen auf die kinetische Theorie der Gase.

Abgesehen von einigen unwesentlichen Aenderungen und Zusätzen ist im Uebrigen die neue Auflage ein unveränderter Abdruck der ersten Auflage.

Aachen, den 3. Juli 1883.

A. Ritter.

Vorrede zur dritten Auflage.

Die im dritten Capitel der vorigen Auflage neu hinzugekommenen Paragraphen 11 und 12, enthaltend die Theorie des Beschleunigungscentrums und der Bresse'schen Kreise, wurden in der neuen Auflage an den Schluss des vierten Capitels verlegt, da es wünschenswerth erschien die erst in diesem letzteren Capitel entwickelten Prinzipien der Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen des geometrischen Körpers dabei als Grundlage benutzen zu können.

Neu hinzugekommen sind in dieser Auflage: die Theorie des „Hodographen" (§ 8, § 44), Bewegung auf schiefer Ebene mit Luftwiderstand (§ 58), Relative Bewegung des geradlinig schwingenden Punktes in Bezug auf eine rotirende Scheibe (§ 68), Theorie der Verfolgungskurve (§ 70, § 71), Stoss einer Masse gegen eine ruhende Kette (§ 88), ausserdem vielfache Einschaltungen nebst 31 neuen Figuren.

Aachen, den 22. April 1898.

A. Ritter.

Druckfehler.

Auf Seite 93, Zeile 7 von unten muss im letzten Gliede der Gleichung statt e^{-kt} gesetzt werden: e^{+kt}.

Auf Seite 116 muss in Zeile 3 von unten statt ρ^0 gesetzt werden: ρ_0.

Auf Seite 118, Zeile 14 von oben, muss statt $f = \Delta \,.\, a\, d\theta$ gesetzt werden: $f = \Delta \,.\, r\, d\theta$.

Auf Seite 123, Zeile 12 von unten, muss statt $r\omega^3$ gesetzt werden: $r\omega^2$.

Auf Seite 123, Zeile 10 von unten, muss statt $r\omega^4$ gesetzt werden: $r\omega^3$.

Auf Seite 141, Zeile 10 von oben, muss im letzten Gliede der Gleichung statt $\Big[_{\theta=\alpha}^{=0}$ gesetzt werden: $\Big[_{\theta=\alpha}^{\theta=0}$.

Auf Seite 147 muss im letzten Gliede der Gleichung 18) statt $\frac{v_0 z_0}{z^2 \operatorname{tg} \alpha}$ gesetzt werden: $\frac{v\, z_0}{z^2 \operatorname{tg} \alpha}$.

Auf Seite 171 muss in Gleichung 4) statt $\cos \delta$ gesetzt werden: $\sin \delta$.

Auf Seite 184 muss in Gleichung 8) statt $\frac{m_1}{M_2}$ gesetzt werden: $\frac{m_1}{M_1}$.

Inhaltsverzeichniss.

ERSTER ABSCHNITT.

Geometrische Bewegungslehre.

Cap. XII. Bewegung eines freien Systems von materiellen Punkten.

Cap. XIII. Drehbewegungen eines Systems von materiellen Punkten.

ERSTER ABSCHNITT.

Geometrische Bewegungslehre.

Capitel I.

Geradlinige Bewegung des geometrischen Punktes.

§ 1.

Geschwindigkeit.

Die Bewegung des Punktes wird eine gleichförmige genannt, wenn derselbe in je zwei gleichen Zeittheilen gleiche Wegeslängen zurücklegt. Bei einer solchen gleichförmigen Bewegung legt demnach der Punkt auch in jeder Zeiteinheit eine gleich grosse Wegeslänge zurück. Diese in jeder Zeiteinheit zurückgelegte Wegeslänge wird die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung genannt. Man findet die Geschwindigkeit c, indem man die während der ganzen Dauer t durchlaufene Wegeslänge s in t gleiche Theile zerlegt, also aus der Gleichung:

$$1)\quad c = \frac{s}{t}.$$

Die Bewegung des Punktes wird eine ungleichförmige genannt, wenn dieselbe in keinem ihrer Theile gleichförmig ist.

Die oben gegebene Erklärung des Begriffs „Geschwindigkeit" passte nur für die gleichförmige Bewegung. Es handelt sich nun darum, jenen Begriff zu erweitern und denselben so zu definiren, dass die Erklärung für eine beliebige ungleichförmige Bewegung passt.

Um diese Uebertragung des Begriffs Geschwindigkeit auf die ungleichförmige Bewegung zu vermitteln und die Erklärung desselben zurückzuführen auf die oben bereits in Bezug auf die gleichförmige Bewegung gegebene Erklärung: dazu kann man

sich mit Vortheil des Begriffs der **durchschnittlichen** oder **mittleren** Geschwindigkeit bedienen.

Die **durchschnittliche** oder **mittlere** Geschwindigkeit des ungleichförmig sich bewegenden Punktes ist diejenige Geschwindigkeit, welche ein gleichförmig sich bewegender Punkt haben müsste, um eben dieselbe Wegeslänge in eben derselben Zeit zurückzulegen, wie der ungleichförmig sich bewegende Punkt.

Es folgt aus dieser Erklärung zunächst, dass es zulässig ist, die obige Gleichung 1) auch auf jede beliebige nicht gleichförmige Bewegung anzuwenden — in solchen Fällen nämlich, wo es sich lediglich um die Bestimmung der **mittleren** Geschwindigkeit derselben handelt. Wenn mit t die ganze Dauer einer beliebigen Bewegung und mit s die ganze zurückgelegte Wegeslänge bezeichnet wird, so ist

$$c = \frac{s}{t}$$

die **durchschnittliche** oder **mittlere** Geschwindigkeit dieser Bewegung.

Wenn z. B. ein von Europa nach Amerika segelndes Schiff in 25 Tagen die Strecke von 1000 Meilen zurücklegte, so kann man sagen: die durchschnittliche oder mittlere Geschwindigkeit des Schiffs war $\frac{1000}{25} = 40$ Meilen pro Tag, und ist es dabei im Uebrigen gleichgültig, in welcher Weise Windstille und Sturm, langsame und rasche Fahrt während der Reise mit einander gewechselt haben.

Wenn ein Eisenbahnzug die Strecke von 72000 Metern in zwei Stunden oder 7200 Secunden zurücklegte, so war während dieser Zeit seine mittlere Geschwindigkeit $\frac{72000}{7200} = 10$ Meter pro Secunde — wie auch immer rasche Fahrt auf den Zwischenstrecken und Stillstand an den Zwischenstationen während jener zwei Stunden auf einander gefolgt sind.

Der Begriff der mittleren oder durchschnittlichen Geschwindigkeit hat nur dann eine bestimmte Bedeutung, wenn ein ganz bestimmter Zeitraum angegeben wird, auf welchen derselbe sich beziehen soll. Man wird bei der ungleichförmigen Bewegung im Allgemeinen zu ganz verschiedenen Werthen gelangen, je nachdem man entweder für die ganze Dauer der Bewegung oder nur für den einen oder andern Theil derselben die mittlere Geschwindigkeit berechnet.

Wenn mit s die Grösse bezeichnet wird, welche die zurückgelegte Wegeslänge nach Ablauf der Zeit t erreicht hat, und mit Δs die Wegeslänge, welche der Punkt in dem hierauf folgenden Zeitabschnitt Δt durchläuft, so bildet der obigen Erklärung gemäss der

Quotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ die durchschnittliche oder mittlere Geschwindigkeit während jenes bestimmten Zeitabschnitts Δt. Je nach der Grösse, welche man diesem Zeitabschnitte Δt beilegt, wird man für die durch jenen Quotienten dargestellte mittlere Geschwindigkeit während dieses Zeitraumes andere und andere Werthe erhalten.

Diese Veränderlichkeit des Quotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ist jedoch nach einer Richtung hin eine bestimmt begrenzte. Denkt man sich nämlich den Endpunkt jenes Zeitabschnitts Δt dem unverrückt bleibenden Anfangspunkte immer näher rückend — also den Zeitabschnitt Δt selbst immer kleiner werdend dem Grenzwerthe Null immermehr sich nähernd — so ergiebt sich für den Quotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, welcher fortwährend seine Bedeutung als mittlere Geschwindigkeit beibehält, ebenfalls eine Annäherung an einen bestimmten Grenzwerth, welcher nach der Bezeichnungsweise der Differenzialrechnung mit dem Zeichen:

$$\lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

zu bezeichnen sein würde, und dieser Grenzwerth ist es, welchen man die wirkliche Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung nennt für jenen Zeitpunkt, nämlich für den Endpunkt des Zeitraumes t.

Man kann daher den Begriff der Geschwindigkeit für einen bestimmten Zeitpunkt der ungleichförmigen Bewegung definiren als mittlere Geschwindigkeit während des nächstfolgenden unendlich kleinen Zeittheils der Bewegung — wobei der Ausdruck „unendlich klein" in dem Sinne der Differenzialrechnung zu nehmen ist und nur eine Abkürzungsform bildet für die oben gegebene umständlichere Erklärungsweise.

Die Bewegung eines Punktes kann aufgefasst werden als Wachsen der von demselben zurückgelegten Wegeslänge, und die Geschwindigkeit der Bewegung als Geschwindigkeit des Wachsens der veränderlichen Grösse s. In diesem Sinne kann die Geschwindigkeit auch definirt werden als diejenige Grösse, um welche die zurückgelegte Wegeslänge in der nächstfolgenden Zeiteinheit wachsen würde, wenn während derselben das Wachsen gleichförmig erfolgte. Wenn das Gesetz des allmählichen Wachsens der Wegeslänge bekannt ist, d. h. wenn die Form der Function:

$$s = f(t)$$

gegeben ist, so kann nach den Regeln der Differenzialrechnung die Geschwindigkeit v berechnet werden aus der Gleichung:

$$2) \quad v = \frac{ds}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = f'(t).$$

Wäre z. B. das Gesetz der Bewegung dargestellt durch den Ausdruck:

$$s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3,$$

so würde man für die Geschwindigkeit v die Gleichung erhalten:

$$v = B + 2Ct + 3Dt^2,$$

aus welcher man für jeden Werth von t den zugehörigen Werth von v berechnen kann.

Nach der hier gegebenen Definition kann man ohne Bedenken den Begriff „Geschwindigkeit" auch übertragen auf andere Grössen, welche mit der Zeit t sich ändern. Wenn u irgend eine beliebige Grösse ist, welche mit der Zeit t stetig sich ändert, so kann man dieselbe Reihe von Betrachtungen auf das Gesetz des Wachsens dieser Grösse u anwenden und gelangt auf demselben Wege schliesslich zu dem Differenzial-Quotienten $\frac{du}{dt}$ als dem Ausdrucke für die Geschwindigkeit dieses Wachsens.

So z. B. kann die Rede sein von der Geschwindigkeit, mit welcher die Temperatur eines Körpers zunimmt, oder von der Geschwindigkeit, mit welcher der von einem um feste Drehachse sich drehenden Körper beschriebene Winkel wächst. Wenn für letzteren Fall allgemein mit α der Winkel bezeichnet wird, um welchen der Körper während der Zeit t sich gedreht hatte, so ist

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega$$

die Geschwindigkeit des Wachsens von α oder die sogenannte Winkelgeschwindigkeit (oder Drehgeschwindigkeit).

Je nachdem die veränderliche Grösse im Wachsen oder Abnehmen begriffen ist, wird für die Geschwindigkeit ein positiver oder negativer Werth sich ergeben.

So z. B. würde bei einem allmählich sich abkühlenden Körper die Geschwindigkeit der Temperatur-Zunahme einen negativen Werth haben. Ebenso würde bei einem in rückläufiger Bewegung begriffenen Punkte für die Geschwindigkeit der Vorwärtsbewegung ein negativer Werth sich ergeben.

§ 2.

Beschleunigung.

Bei der gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit eine constante Grösse, bei der ungleichförmigen ist sie in stetiger Aenderung begriffen.

Da bei ungleichförmiger Bewegung die Geschwindigkeit v demnach eine Grösse ist, welche als Function von t mit der Zeit stetig sich ändert, so kann das am Schlusse des vorigen Paragraphen erklärte Verfahren der Uebertragung des Geschwindigkeitsbegriffs auf beliebige andere der Zeit nach veränderliche Grössen auch auf die Geschwindigkeit selbst angewendet werden. Es kann die Rede sein von der Geschwindigkeit, mit welcher in einem bestimmten Zeitpunkte das Wachsen der Geschwindigkeit selbst erfolgt, und würde darunter nach obiger Erklärung die Grösse zu verstehen sein, um welche die Geschwindigkeit in der nächstfolgenden Zeiteinheit zunehmen würde, wenn das Wachsen derselben gleichförmig erfolgte.

Diese Geschwindigkeit des Wachsens der Geschwindigkeit wird die Beschleunigung der Bewegung genannt.

Hiernach kann man, wenn die Geschwindigkeit v als Function der Zeit t gegeben ist, die Beschleunigung p berechnen aus der Gleichung:

$$p = \frac{dv}{dt},$$

welche nach Substitution des aus Gleichung 2) für v zu entnehmenden Werthes die Form annimmt:

$$p = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = f''(t).$$

Die Beschleunigung wird also durch den zweiten Differenzial-Quotienten des Weges (nach der Zeit genommen) dargestellt.

Setzt man wie bei dem im vorigen Paragraphen gewählten Beispiele:

$$s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3,$$

so erhält man für die Beschleunigung den Wert:

$$p = 2C + 6Dt.$$

Die Beschleunigung ist im Allgemeinen eine der Zeit nach veränderliche Grösse. In dem speciellen Falle, wenn die Beschleunigung eine constante Grösse behält, oder das Wachsen der Geschwindigkeit gleichförmig erfolgt, wird die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte genannt. Für diesen speciellen Fall — aber auch nur für diesen — würde die Beschleunigung definirt werden können als diejenige Grösse, um welche die Geschwindigkeit in jeder Zeiteinheit wirklich zunimmt.

Als ein specieller Fall der gleichförmig beschleunigten Bewegung kann in gewissem Sinne die gleichförmige Bewegung selbst betrachtet werden,

insofern bei derselben die Beschleunigung den constanten Werth Null hat — sowie als specieller Fall der gleichförmigen Bewegung wiederum der Ruhezustand betrachtet werden kann, insofern bei demselben die Geschwindigkeit den constanten Werth Null hat.

Die Bewegung wird eine ungleichförmig beschleunigte genannt, wenn dieselbe in keinem ihrer Theile gleichförmig beschleunigt ist, d. h. wenn die Beschleunigung eine Grösse bildet, welche mit der Zeit fortwährend sich ändert.

Wie der Begriff „Geschwindigkeit", so kann nunmehr auch der Begriff „Beschleunigung" übertragen werden auf jede beliebige andere Grösse u, welche mit der Zeit t stetig wächst. Es kann auch von der Beschleunigung dieses Wachsens in einem bestimmten Zeitpunkte die Rede sein, und dieselbe durch den Ausdruck $\frac{d^2u}{dt^2}$ dargestellt werden.

Auf diese Weise würde man sich z. B. eine bestimmte Vorstellung bilden können von der Beschleunigung, mit welcher die Temperatur eines Körpers zunimmt, oder von der Beschleunigung, mit welcher ein Körper um eine feste Drehachse sich dreht. Wenn mit α der nach Ablauf der Zeit t von dem Körper zurückgelegte Winkel bezeichnet wird, so ist die Beschleunigung des Wachsens dieses Winkels, oder die sogenannte „Winkelbeschleunigung" ε zu bestimmen aus der Gleichung:

$$\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Man könnte dieses Verfahren der Uebertragung der Begriffe „Geschwindigkeit" und „Beschleunigung" auf andere der Zeit nach veränderliche Grössen noch weiter durchführen und dasselbe z. B. auf die Beschleunigungsgrösse selbst wiederum anwenden. Die Geschwindigkeit des Wachsens der Beschleunigung p würde durch den Ausdruck:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3},$$

und die Beschleunigung dieses Wachsens durch den Ausdruck:

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{d^4s}{dt^4}$$

darzustellen sein u. s. w. Indessen hat sich in der Mechanik bisher die Nothwendigkeit nicht herausgestellt, für solche Geschwindigkeiten und Beschleunigungen höherer Ordnung besondere Benennungen einzuführen.

Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist $\frac{dp}{dt} = 0$, oder die Beschleunigung p eine constante Grösse. Durch zweimalige Integration der Gleichung:

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = p$$

erhält man resp. für Geschwindigkeit und Weg in diesem Falle die Gleichungen:

$$v = \frac{ds}{dt} = pt + v_0,$$

$$s = \frac{pt^2}{2} + v_0 t + s_0,$$

in welchen die Constanten v_0, s_0 die Anfangswerthe resp. von v und s bedeuten, d. h. die Werthe, welche diese Grössen für $t = 0$ annehmen.

Capitel II.

Krummlinige Bewegung des geometrischen Punktes.

§ 3.

Projection der Bewegungen.

Bei der geradlinigen Bewegung des Punktes genügte es, die beiden Begriffe „Geschwindigkeit" und „Beschleunigung" der Grösse nach zu definiren. Bei der krummlinigen Bewegung dagegen hat man, um eine erschöpfende Definition jener beiden Begriffe zu geben, auch die Richtung der Geschwindigkeit, und die Richtung der Beschleunigung ins Auge zu fassen. Es handelt sich darum, genau zu definiren: was man darunter zu verstehen hat, wenn von Grösse und Richtung der Geschwindigkeit, oder wenn von Grösse und Richtung der Beschleunigung in einem bestimmten Augenblicke die Rede ist.

Bei der krummlinigen Bewegung ist die Bewegungsrichtung in stetiger Aenderung begriffen. Wenn von der Richtung die Rede ist, in welcher der Punkt in einem bestimmten Zeitpunkte sich bewegt, so ist darunter die Richtung der Tangente an dem betreffenden Punkte der Bahnlinie zu verstehen. Diese Tangentenrichtung ist zugleich als Richtung der augenblicklichen Geschwindigkeit aufzufassen, insofern sie die Bahnlinie für die nächstfolgende Zeiteinheit bilden würde, wenn die Richtungsänderung in jenem Zeitpunkte aufhörte. Bei beliebiger krummliniger Bewegung des Punktes ist daher sowohl die Richtung als die Grösse der Geschwindigkeit in beständiger Aenderung begriffen.

Wie die Form und das Krümmungsgesetz einer krummen Linie erkannt werden kann aus den Projectionen derselben auf feste

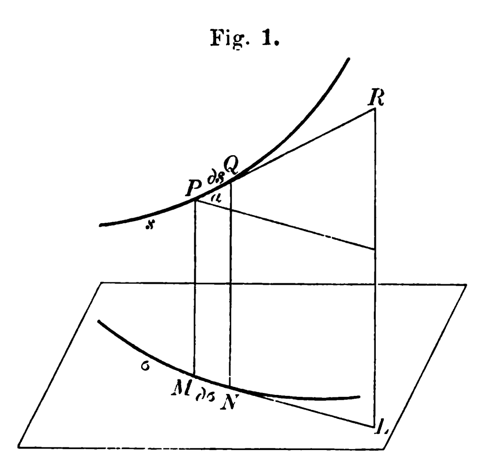
Projectionsebenen, so kann man für das Gesetz der krummlinigen Bewegung zu mathematischen Ausdrücken gelangen und die Theorie derselben zurückführen auf die Lehre von der geradlinigen Bewegung, indem man die **Projectionen** der Bewegung auf feste Coordinaten-Ebenen und -Achsen zu Hülfe nimmt.

Denkt man sich von jedem der aufeinander folgenden Punkte der Bahnlinie, welche der Punkt im Raume beschreibt, ein Perpendikel auf eine feste Ebene gefällt, so ergiebt sich, dass der Fusspunkt dieses Perpendikels in der Ebene gleichzeitig ebenfalls eine Bahnlinie beschreibt, deren einzelne Abschnitte die Projectionen der correspondirenden Abschnitte der Bahnlinie im Raume bilden. Zwischen den Bewegungen der beiden Punkte findet eine Beziehung statt, welche sich ausdrücken lässt durch den Satz:

Die Geschwindigkeit der Projection ist gleich der Projection der Geschwindigkeit.

Um sich von der Richtigkeit dieses Satzes zu überzeugen, hat man zunächst ein unendlich kleines Stück PQ der Bahnlinie im Raume zu vergleichen mit seiner Projection MN auf der Projectionsebene (Fig. 1). Je kleiner dieses Stück gedacht wird, um so mehr ist es zulässig, dasselbe als geradlinig und mit der Tangentenrichtung des Anfangspunktes zusammenfallend zu behandeln. Wenn also mit α der Winkel bezeichnet wird, welchen die Tangentenrichtung im Punkte P mit der Projectionsebene (oder mit der Tangentenrichtung im Punkte M) einschliesst, so ergiebt sich die Gleichung:

Fig. 1.



$$\frac{d\sigma}{ds} = \cos \alpha,$$

welche ihre Gültigkeit behält, wenn auf der linken Seite Zähler und Nenner durch den zugehörigen unendlich kleinen Zeitabschnitt dt dividirt werden, und alsdann die Form annimmt:

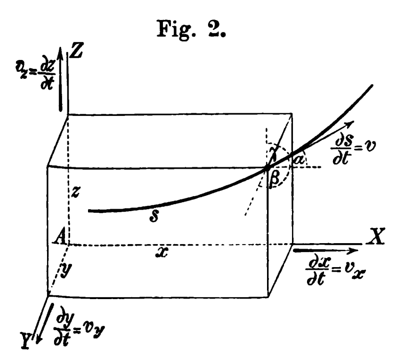
$$1)\quad \frac{\frac{d\sigma}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \cos\alpha \quad \text{oder} \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{ds}{dt}\cdot\cos\alpha.$$

In dieser Gleichung bedeutet $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Punktes im Raume, und $\frac{d\sigma}{dt}$ die Geschwindigkeit der Projection. Es ist also der oben aufgestellte Satz in derselben ausgedrückt. Denkt man sich nämlich die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ auf der Tangentenrichtung abgetragen durch die Linie $\overline{PR}$ dargestellt, und in gleicher Weise die Geschwindigkeit $\frac{d\sigma}{dt}$ durch die Linie $\overline{ML}$, so ergiebt sich, dass letztere die Projection der ersteren bildet.

Genau dieselbe Betrachtungsweise angewendet auf den Fall, in welchem die Bewegung des Punktes — statt auf eine Ebene — auf eine feste gerade Linie projicirt gedacht wird, führt zu dem Resultate: dass der obige Satz auch für diesen Fall gültig ist.

Denkt man sich die Bewegung des Punktes im Raume auf drei rechtwinkelig zu einander gerichtete Coordinaten-Achsen gleichzeitig projicirt, so ergeben sich nach Fig. 2 die Gleichungen:

Fig. 2.



$$2)\quad \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\alpha,$$

$$3)\quad \frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\beta,$$

$$4)\quad \frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\gamma.$$

Durch Addition der Quadrate dieser Gleichungen erhält man ferner die Beziehung:

$$5)\quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \quad \text{oder:}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Geschwindigkeit v der Grösse und Richtung nach durch die Diagonale eines Parallelepipedons dargestellt werden kann, dessen Kanten der Grösse und Richtung nach durch die Geschwindigkeiten v_x, v_y, v_z gebildet werden.

§ 4.

Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten.

Die Grösse x bildet den Abstand des bewegten Punktes von der Ebene AYZ für den Endpunkt der Zeit t. Es kann also nach der im § 1 gegebenen Erklärung die Grösse $\frac{dx}{dt}$ auch aufgefasst werden als die Geschwindigkeit des Wachsens dieses Abstandes oder als die Geschwindigkeit, mit welcher der im Raume sich bewegende Punkt von der Ebene AYZ sich entfernt. Auf analoge Weise können die Ausdrücke $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ gedeutet werden. Man kann daher die Bewegung des Punktes im Raume auch so auffassen, als ob derselbe gleichzeitig von jeder der drei Coordinaten-Ebenen sich entfernte, oder als ob derselbe gleichzeitig drei geradlinige Bewegungen in den Richtungen der drei Coordinaten-Achsen ausführte.

Man gelangt in der That genau zu demselben Resultate, wenn man die Bewegung des Punktes im Raume so auffasst, als ob derselbe längst der Linie AX sich bewegt, während diese Linie parallel zu ihrer Anfangslage bleibend in der Richtung AY sich bewegt, und die ganze Ebene AXY zugleich stets parallel zu ihrer Anfangslage bleibend in der Richtung AZ sich bewegt — wobei man statt von der Achse AX auch von einer der beiden anderen Achsen ausgehen und die Reihenfolge der drei Bewegungen überhaupt beliebig vertauschen kann. In diesem Sinne pflegt man jene drei einzelnen Bewegungen auch wohl die drei Seitenbewegungen des Punktes zu nennen und die wirkliche Bewegung desselben im Raume — insofern sie aus der Zusammensetzung jener drei Seitenbewegungen resultirt — die resultirende Bewegung.

Es ergiebt sich hieraus, dass man die Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung oder die resultirende Geschwindigkeit ihrer Grösse und Richtung nach darstellen kann, indem man die Diagonale des aus den drei Seitengeschwindigkeiten gebildeten Parallelepipedons construirt, oder indem man die drei geradlinigen Stücke, welche nach Grösse und Richtung die Seitengeschwindigkeiten darstellen, in beliebiger Reihenfolge aneinander fügt und den Endpunkt des letzten mit dem Anfangspunkt des ersten durch eine gerade Linie verbindet.

Dieses Verfahren des Aufsuchens der resultirenden Geschwindigkeit lässt sich auch auf den Fall noch anwenden, wo der Punkt

mehr als drei Geschwindigkeiten besitzt. Wenn ein Punkt gleichzeitig beliebig viele geradlinige oder krummlinige Bewegungen ausführt, so kann man, indem man den Durchschnittspunkt der drei Coordinaten-Achsen in den Anfangspunkt der Bewegung verlegt, die ganze in der Richtung AX zurückgelegte Wegeslänge x als zusammengesetzt betrachten aus den Beiträgen x_1, x_2, . . . x_n, welche von den einzelnen Bewegungen dazu geliefert werden. Wenn man alsdann von dem Ausdrucke:

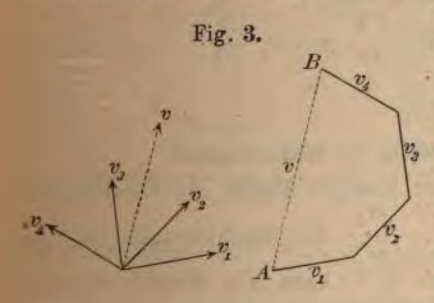
$$x = x_1 + x_2 + \dots x_n$$

den Differenzial-Quotienten bildet, so erhält man für die Geschwindigkeit des Punktes in der Richtung der Achse AX den Werth:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} + \dots \frac{dx_n}{dt}.$$

Die analogen Gleichungen ergeben sich für die anderen beiden Achsenrichtungen. Die Gleichung 5) des vorigen Paragraphen gilt daher auch für die Resultirende beliebig vieler Geschwindigkeiten, sobald man unter jeder von den drei Grössen v_x, v_y, v_z resp. die Summe der Seitengeschwindigkeiten in der betreffenden Achsenrichtung versteht. Diese Resultirende kann man darstellen, indem man die Diagonale eines aus den drei Seitengeschwindigkeitssummen gebildeten Parallelepipedons construirt, oder, indem man wie oben die drei geradlinigen Stücke, welche nach Grösse und Richtung diese Seitengeschwindigkeitssummen darstellen, in beliebiger Reihenfolge an einander fügt und den Endpunkt des letzten mit dem Anfangspunkte des ersten verbindet. Was das letztere Verfahren betrifft, so überzeugt man sich leicht, dass man zu dem gleichen Resultate gelangen würde, wenn man unmittelbar die Geschwindigkeiten jener n einzelnen Bewegungen selbst als geradlinige Stücke in beliebiger Reihenfolge an einander fügte und von der auf solche Weise gebildeten gebrochenen Linie den Endpunkt B mit dem Anfangspunkte A durch eine gerade Linie verbände, welche die Schlusslinie des entstandenen Polygons bildet (Fig. 3).

Fig. 3.

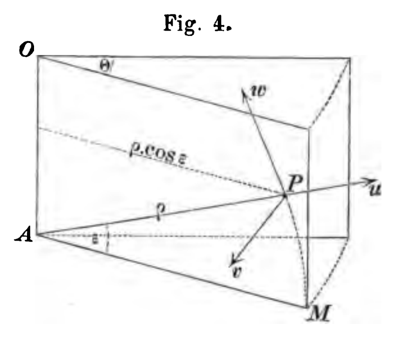


Je nachdem man den hier gefundenen Satz in der ersteren oder in der letzteren Form anwendet, kann man denselben das Parallelepipedon der Geschwindigkeiten oder das Polygon der Geschwindigkeiten nennen.

Durch die Umkehrung dieses Satzes erhält man das Verfahren, welches bei der Zerlegung der Geschwindigkeiten anzuwenden ist. Wenn die Geschwindigkeit v gegeben ist, so kann man den Anfangspunkt der dieselbe nach Grösse und Richtung repräsentirenden Linie mit dem Endpunkte derselben durch eine beliebige aus geradlinigen Stücken zusammengesetzte gebrochene Linie verbinden, und die Bewegung des Punktes so auffassen, als ob derselbe gleichzeitig alle die Geschwindigkeiten besässe, welche durch die einzelnen Stücke jener gebrochenen Linie nach Grösse und Richtung dargestellt sind.

Anstatt rechtwinklige Coordinaten anzuwenden, kann man auch Polar-Coordinaten wählen und die Bewegung des Punktes so auffassen, als ob derselbe längs der Linie AP sich bewegt, während dieselbe in der Ebene AMO mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varepsilon}{dt}$ um den Punkt A sich dreht, und diese Ebene selbst zugleich mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\theta}{dt}$ um die Achse AO sich dreht (Fig. 4). Für die drei rechtwinklig zu einander gerichteten Seitengeschwindigkeiten ergeben sich dann die Gleichungen:

Fig. 4.



$$u = \frac{d\rho}{dt}, \quad v = \rho \cos \varepsilon \frac{d\theta}{dt}, \quad w = \rho \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

§ 5.

Zusammensetzung und Zerlegung der Beschleunigungen.

In dem Augenblicke, wo der bewegte Punkt die Coordinaten x, y, z hat, sind: $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ die Beschleunigungen des Wachsens dieser Grössen. Nach § 2 kann die Beschleunigung definirt werden als durchschnittliche Geschwindigkeitszunahme pro Zeiteinheit während des nächstfolgenden unendlich kleinen Zeittheilchens. Jede der obigen drei Beschleunigungen kann daher als eine

in der betreffenden Achsenrichtung neu hinzukommende Geschwindigkeit aufgefasst werden. Die Resultirende dieser drei Beschleunigungen kann also nach denselben Regeln bestimmt werden, wie die Resultirende von drei rechtwinklig zu einander gerichteten Geschwindigkeiten. Der im vorigen Paragraphen gefundene Satz bleibt daher auch dann noch gültig, wenn man das Wort „Geschwindigkeit" mit dem Worte „Beschleunigung" vertauscht.

Die Beschleunigung eines beliebig viele Bewegungen gleichzeitig ausführenden Punktes kann dargestellt werden durch die Diagonale eines aus den für die drei Achsenrichtungen sich ergebenden Beschleunigungssummen:

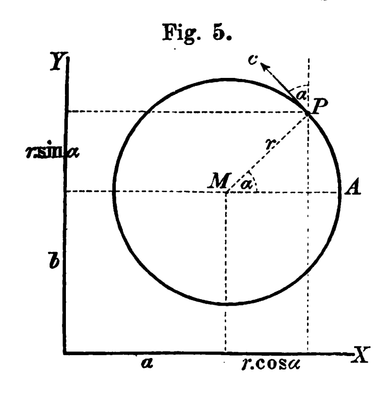
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2} + \dots$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{d^2y_2}{dt^2} + \dots$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z_1}{dt^2} + \frac{d^2z_2}{dt^2} + \dots$$

gebildeten Parallelepipedons, oder durch die Schlussseite eines aus den einzelnen Beschleunigungen selbst gebildeten Polygons. Umgekehrt: kann die durch die Schlussseite gegebene Beschleunigung zerlegt werden in die durch die übrigen Seiten des Polygons repräsentirten Einzelbeschleunigungen.

Fig. 5.



Für die Coordinaten des Punktes P der Kreislinie ergeben sich aus Fig. 5 die Gleichungen:

$$x = a + r\cos\alpha,\quad y = b + r\sin\alpha.$$

Denkt man sich den Punkt die Kreislinie mit der constanten Geschwindigkeit c durchlaufend, so erhält man für die Geschwindigkeiten in den Achsenrichtungen die Ausdrücke:

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt},\quad \frac{dy}{dt} = r\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}.$$

Betrachtet man den Punkt A als Anfangspunkt der Bewegung, so ist:

$$r\alpha = ct,\quad \text{folglich } r\frac{d\alpha}{dt} = c.$$

Nach Substitution dieses Werthes nehmen die Gleichungen die Formen an:

$$\frac{dx}{dt} = -c\sin\alpha,\quad \frac{dy}{dt} = c\cos\alpha,$$

in welchen sie den in § 3 gefundenen Satz ausdrücken: „Die Geschwindigkeit der Projection ist gleich der Projection der Geschwindigkeit."

Für die Beschleunigungen in den beiden Achsenrichtungen ergeben sich die Ausdrücke:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -c\cos\alpha\,\frac{d\alpha}{dt},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -c\sin\alpha\,\frac{d\alpha}{dt}.$$

Nach Substitution des Werthes $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{c}{r}$ (der nach § 1 die Grösse der Winkelgeschwindigkeit darstellt, mit welcher der Radius MP sich dreht) nehmen diese Gleichungen die Formen an:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{c^2}{r}\cos\alpha,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{c^2}{r}\sin\alpha,$$

und zeigen, dass die resultirende Beschleunigung:

$$p = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

die constante Grösse $\frac{c^2}{r}$ hat, sowie, dass dieselbe stets nach dem Mittelpunkte M des Kreises gerichtet ist.

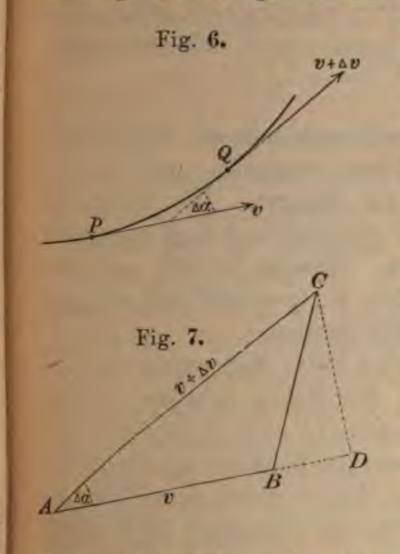
§ 6.

Centripetal-Beschleunigung und Tangential-Beschleunigung.

Es zeigte sich schon bei dem in Fig. 5 dargestellten Falle, dass bei der krummlinigen Bewegung der Begriff „Beschleunigung" sowohl die Grössen-Aenderung als auch die Richtungs-Aenderung der Geschwindigkeit einschliesst; denn obwohl angenommen wurde, dass der Punkt mit constanter Geschwindigkeit längs der Kreislinie sich bewegte, so ergaben sich doch für die Seitenbeschleunigungen und für die resultirende Beschleunigung bestimmte von Null verschiedene Werthe. Also auch in solchen Fällen, wo nur die Richtung der Geschwindigkeit beständig sich ändert, hat man diese Aenderung als stetiges Hinzutreten von neuer Geschwindigkeit, mithin als das Vorhandensein einer Beschleunigung aufzufassen. Die Beiträge, welche einerseits durch die Grössen-Aenderung, andererseits durch die Richtungs-Aenderung der Geschwindigkeit zu der Gesammtbeschleunigung geliefert werden, können auch jeder einzeln bestimmt werden, und die Art und Weise, wie aus diesen beiden die resultirende Beschleunigung sich zusammensetzt, lässt sich auf folgende Weise ermitteln.

Wenn man die Geschwindigkeit v, welche der Punkt an der Stelle P nach Ablauf der Zeit t erreicht hat, vergleicht mit der Geschwindigkeit $v + \Delta v$, welche dem Zeitwerthe $t + \Delta t$ und dem Orte Q entspricht, so ergiebt sich, dass die Grösse der Geschwindigkeit während des Zeitabschnitts Δt allerdings um Δv gewachsen

ist (Fig. 6). Da aber gleichzeitig die Richtung der Geschwindigkeit um den Winkel $\Delta\alpha$ sich geändert hat, so ist diese Grösse Δv keineswegs als die ganze während der Zeit Δt neu hinzugekommene Geschwindigkeit zu betrachten; sondern man hat vielmehr, um dieselbe zu bestimmen, den im § 4 gefundenen Satz vom Polygon der Geschwindigkeiten anzuwenden in der Weise: dass man untersucht, welche Geschwindigkeit zu der Geschwindigkeit v hinzugefügt werden muss, um die neue Geschwindigkeit $v + \Delta v$ nicht nur der Grösse, sondern auch der Richtung nach als Resultirende hervorzubringen. Es ist zu diesem Zwecke nur nöthig, von einem beliebigen Punkte A aus die beiden Geschwindigkeiten $v = AB$ und $v + \Delta v = AC$ nach Grösse und Richtung abzutragen und alsdann die Endpunkte durch eine gerade Linie BC zu verbinden, welche die gesuchte Geschwindigkeit darstellt (Fig. 7).



Diese während der Zeit Δt neu hinzugekommene Geschwindigkeit BC kann man in die beiden rechtwinkelig zu einander gerichteten Seitengeschwindigkeiten:

$$BD = (v + \Delta v) \cos \Delta\alpha - v,$$
$$CD = (v + \Delta v) \sin \Delta\alpha$$

zerlegen, und es ergeben sich für die in diesen beiden Richtungen während der Zeit Δt durchschnittlich pro Zeiteinheit neu hinzugekommenen Geschwindigkeiten die Werthe:

$$\frac{BD}{\Delta t} = \frac{(v + \Delta v) \cos \Delta\alpha - v}{\Delta t},$$
$$\frac{CD}{\Delta t} = \frac{(v + \Delta v) \sin \Delta\alpha}{\Delta t},$$

welche nach § 2 die mittleren Beschleunigungen während des Zeitabschnitts Δt bilden. Die Grenzwerthe, welchen diese Grössen sich nähern in dem Maasse, wie Δt dem Werthe Null sich nähert, bilden die wirklichen Beschleunigungen in jenen

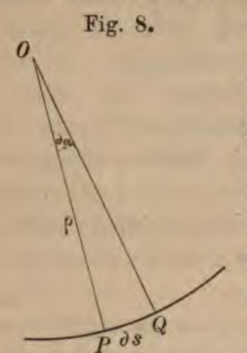
beiden Richtungen für den Endpunkt des Zeitraumes t. Ma
hält also für diese Beschleunigungen die Ausdrücke:

$$\lim\left\{\frac{(v+\Delta v)\cos\Delta\alpha - v}{\Delta t}\right\} = \frac{dv}{dt},$$

$$\lim\left\{\frac{(v+\Delta v)\sin\Delta\alpha}{\Delta t}\right\} = v\frac{d\alpha}{dt}.$$

Die erstere fällt ihrer Richtung nach mit der Geschw
keit v, also mit der Tangentenrichtung zusammen und wir
halb **Tangential-Beschleunigung** genannt. Die letzte
rechtwinkelig zur Geschwindigkeit v gerichtet und liegt zugle
der Krümmungsebene der Bahnlinie. Dieselbe ist also nac
Krümmungsmittelpunkte der Bahnlinie hin gerichtet und wir
halb **Centripetal-Beschleunigung** genannt.

Fig. 8.



Das unendlich kleine Bogenstück PQ
kann als ein Kreisbogen behandelt w
dessen Halbmesser $OP = \rho$ gleich dem K
mungshalbmesser der Bahnlinie an dieser
ist, und dessen Winkel gleich dem Wink
ist, den die Tangentenrichtungen der Pun
und Q mit einander einschliessen (Fi

Setzt man demgemäss $\rho d\alpha = ds$ oder $d\alpha =$
so wird:

$$v\frac{d\alpha}{dt} = \frac{v}{\rho}\frac{ds}{dt}.$$

Hierin kann für $\frac{ds}{dt}$ als Geschwindigkeit der Bewegung a
gesetzt werden, es ist also die

$$\text{Centripetal-Beschleunigung} = \frac{v^2}{\rho}$$

eine Grösse, zu deren Bestimmung die Kenntniss der Geschw
keit und des Krümmungshalbmessers ausreicht.

Am Schlusse des § 4 wurden die Seitengeschwindigkeiten u, v,
rechnet für diejenigen drei rechtwinkelig zu einander stehenden Rich
welche aus der Anwendung des Polarcoordinaten-Systems sich ergaben.
den Erklärungen des § 2 würde den Differenzial-Quotienten dieser drei
allerdings die Bedeutung von Beschleunigungen nach diesen drei Achs
tungen hin beizulegen sein. Es dürfen jedoch die drei Beschleuni
$\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ keineswegs als die einzigen vorhandenen Beschleunigun
gesehen werden; denn diese Ausdrücke stellen nur die den **Grössen**-
rungen jener Geschwindigkeiten entsprechenden Beschleunigungen da
ausserdem auch noch **Richtungs**-Aenderungen dieser Geschwindigkeite

finden, insofern jenes Achsensystem selbst in beständiger Lagenveränderung begriffen ist, so würde man zu berücksichtigen haben, dass solche Richtungs-Aenderungen ebenfalls als Beschleunigungen aufgefasst werden müssen, und dass erst nach Hinzufügung der diesen Richtungs-Aenderungen entsprechenden Centripetal-Beschleunigungen die totale Beschleunigung aus der Zusammensetzung aller dieser Beschleunigungen als Resultirende hervorgehen würde.

§ 7.

Totalbeschleunigung der krummlinigen Bewegung.

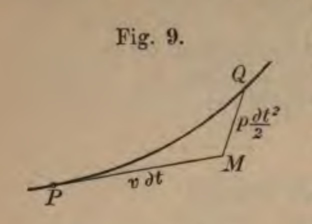
Die wirkliche oder totale Beschleunigung p ist als die Resultirende aus der Tangential-Beschleunigung und der Centripetal-Beschleunigung zu betrachten. Sie wird gleich der Tangential-Beschleunigung, wenn die Richtung der Geschwindigkeit stets dieselbe bleibt, d. h. bei der geradlinigen Bewegung. Sie fällt dagegen mit der Centripetal-Beschleunigung zusammen, wenn die Grösse der Geschwindigkeit stets dieselbe bleibt, d. h. bei gleichförmiger Bewegung längs krummliniger Bahn. Es stellt daher die Tangential-Beschleunigung den Beitrag dar, welchen die Grössen-Aenderung der Geschwindigkeit zu der Total-Beschleunigung liefert, und die Centripetal-Beschleunigung den Beitrag, welchen die Richtungs-Aenderung der Geschwindigkeit dazu liefert.

Die während des Zeit-Abschnitts Δt zu der vorhandenen neu hinzukommende Geschwindigkeit, welche in Fig. 7 durch das Stück BC dargestellt wurde, ist zu betrachten als eine allmählich entstandene, d. h. als eine Geschwindigkeit, welche mit dem Anfangswerthe Null beginnend, nach irgend einem Gesetze stetig an Grösse und Richtung sich ändernd während des Zeitabschnitts Δt übergeht in den nach Grösse und Richtung bestimmten Endwerth BC. Wenn Δt mit dt vertauscht wird, d. h. wenn man den Zeitabschnitt unendlich klein annimmt, so ist es zulässig, die Richtung der neu entstehenden Geschwindigkeit während dieses unendlich kleinen Zeittheilchens als unveränderlich, und das Wachsen derselben als gleichförmig zu betrachten. Man kann daher die während der Zeit dt wirklich ausgeführte Bewegung auffassen als zusammengesetzt aus einer gleichförmigen geradlinigen Bewegung und einer gleichförmig beschleunigten geradlinigen Bewegung, welche letztere die Anfangsgeschwindigkeit Null und die constante Beschleunigung p hat.

Wäre keine Geschwindigkeitsänderung erfolgt, so würde das in die Tangentenrichtung fallende Stück $PM = v\,dt$ die zurückgelegte Wegeslänge bilden (Fig. 9). Da der Punkt Q der Endpunkt der wirklich ausgeführten Bewegung ist, so stellt die Verbindungs-

linie MQ den Weg dar, welcher vermöge der neu entstandene Bewegung hinzukommt. Diese Wegesläng ist nach der am Schlusse des § 2 für d gleichförmig beschleunigte Bewegung ge fundenen Gleichung zu bestimmen un hat die Grösse $MQ = \frac{p\,dt^2}{2}$. Wen es also in einem gegebenen Falle thunlic ist, die Richtung dieser Verbindungslin MQ geometrisch festzulegen, so ist damit zugleich die Richtung d Totalbeschleunigung p gefunden.

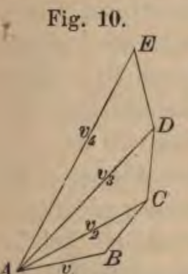
Fig. 9.



§ 8.
Hodograph.

Wenn man das in Fig. 7 dargestellte Constructionsverfahre auf jeden der übrigen Theile der ganzen Bewegung ebenfalls a wendet, d. h. wenn man die in den Endpunkten der einzelnen Zei abschnitte erwähnten Geschwindigkeiten v_1, v_2 ... nach einand von einem beliebigen als Pol gewählten festen Punkte A aus na Grösse und Richtung abträgt und die auf einander folgenden En punkte dieser Strecken durch gerade Linien verbindet, so erhä man eine gebrochene Linie $BCDE$ ..., deren einzelne Stücke B CD, DE ... die in den einzelnen Zeitabschnitten neu hinzukom menden Geschwindigkeiten der Grösse und Richtung nach darstell (Fig. **10**). Denkt man sich diese Zeitabschnit unendlich klein werdend, so geht die gebroche Linie in eine krumme Linie über, deren Tange ten die Richtungen der neu hinzukommenden G schwindigkeiten für sämmtliche Zeitpunkte d Bewegungsdauer darstellen. Die auf solche Wei zu construirende krumme Linie (Fig. **11**) wird d „Hodograph" der Bewegung genannt.

Fig. 10.

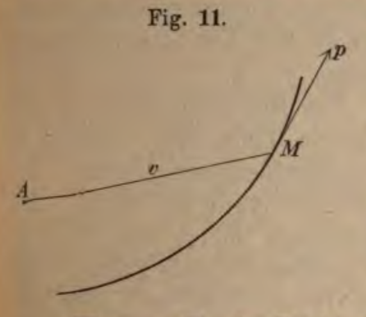


Für denjenigen Zeitpunkt, in welchem die G schwindigkeitder Bewegung gleich v ist, findet man nach obiger E klärung die Richtung der augenblicklichen Totalbeschleunigung p, i dem man in dem Endpunkte des die Geschwindigkeit v nach Grösse un Richtung darstellenden Radiusvectors AM an die Hodographe Kurve eine Tangente legt.

Die während des Zeitelements dt neu hinzukommende G schwindigkeit, welche mit der bereits vorhandenen Geschwindigkeit

zusammengesetzt die Geschwindigkeit $v + dv$ als Resultirende ergiebt, ist dt mal so gross als die pro Zeiteinheit neu erzeugte Geschwindigkeit, hat also die Grösse $p\,dt$ und erscheint in Fig. 12 durch das Bogenelement $\widehat{MN}$ der Hodographen-Kurve dargestellt. Während des Zeitelements dt durchläuft also der Hodographenpunkt, oder der Endpunkt des die Geschwindigkeit darstellenden Radiusvectors, die Strecke $MN = p\,dt$; folglich ist p zugleich die Geschwindigkeit, mit welcher in diesem Zeitpunkte der Hodographen-Punkt sich bewegt.

Fig. 11.



Die Geschwindigkeit des Hodographen-Punktes stellt also der Grösse und Richtung nach die Totalbeschleunigung der Bewegung dar.

Wenn z. B. ein Punkt gleichförmig mit der Geschwindigkeit v die Peripherie eines Kreises vom Halbmesser r durchläuft (Fig. 13), so ist der Hodograph dieser Bewegung eine Kreislinie vom Halbmesser v (Fig. 14), und die Umlaufszeit des Hodographenpunktes hat dieselbe Grösse wie die Umlaufszeit des ersten Punktes. Wenn der gemeinschaftliche Werth dieser beiden Umlaufszeiten mit T bezeichnet wird, so ist:

$$v\,T = 2\,r\,\pi \text{ und } p\,T = 2\,v\,\pi.$$

Fig. 12.

Durch Elimination der Grösse T erhält man aus diesen beiden Gleichungen für die Geschwindigkeit des Hodographenpunktes oder die Totalbeschleunigung des ersten Punktes in Uebereinstimmung mit dem in § 5 gefundenen Resultate den Werth:

$$p = \frac{v^2}{r}.$$

Indem man für die in Fig. 14 dargestellte Bewegung wiederum den Hodographen construirt, findet man auf dieselbe Weise für den Hodographen zweiter Ordnung nach Fig. 15 die Gleichung:

$$u = \frac{p^2}{v} = \frac{v^3}{r^2},$$

und durch abermalige Wiederholung dieses Verfahrens findet man für den Hydrographen dritter Ordnung nach Fig. 16 die Gleichung:

$$w = \frac{u^2}{p} = \frac{v^4}{r^3}.$$

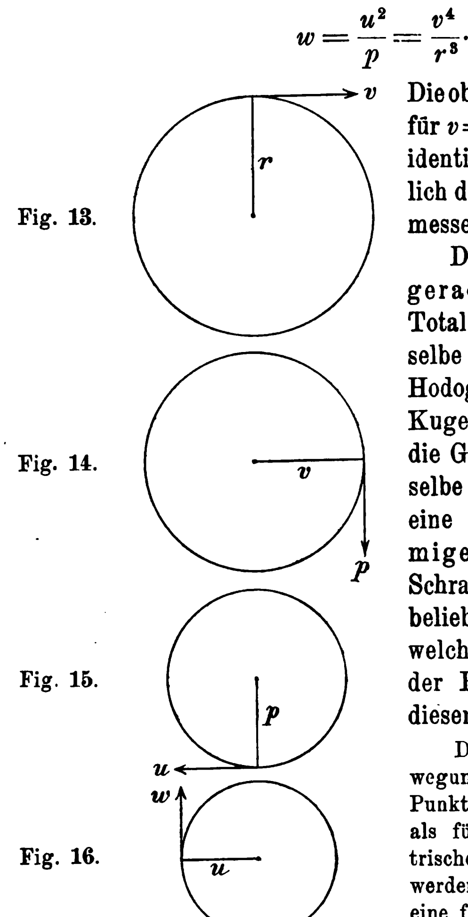


Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

Fig. 16.

Die obigen Gleichungen zeigen, dass für $v = r$ sämmtliche Hodographen identische Formen annehmen, nämlich die einer Kreislinie vom Halbmesser $v = r$.

Der Hodograph geht in eine gerade Linie über, wenn die Totalbeschleunigung stets dieselbe Richtung bei behält. Der Hodograph bildet eine in der Kugelfläche liegende Kurve, wenn die Geschwindigkeit stets dieselbe Grösse bei behält, und wird eine Kreislinie bei gleichförmiger Bewegung längs einer Schraubenlinie oder längs einer beliebigen ebenen Bahnlinie, in welchem letzteren Falle zugleich der Pol mit dem Mittelpunkte dieser Kreislinie zusammenfällt.

Die hier in Bezug auf die Bewegung des einfachen geometrischen Punktes erklärten Sätze können auch als für die Bewegung eines geometrischen Körpers geltend betrachtet werden, sobald die Bewegung desselben eine fortschreitende ist, d. h. sobald dieselbe so beschaffen ist, dass die gerade Verbindungslinie je zweier Punkte des Körpers stets parallel zu ihrer anfänglichen Richtung bleibt. In diesem Falle beschreiben alle Punkte des Körpers gleiche Bahnlinien in gleicher Weise, und das Bewegungsgesetz des einen Punktes ist dasselbe wie für alle übrigen Punkte des Körpers.

Capitel III.

Bewegung des geometrischen Körpers.

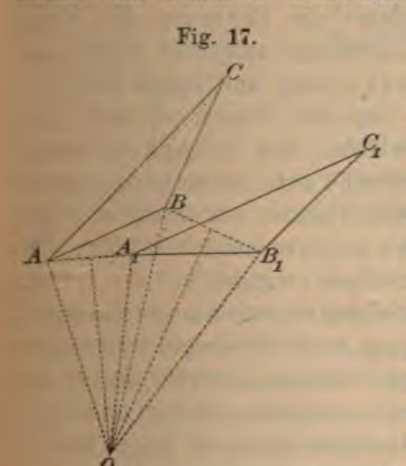
§ 9.

Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene. Theorie des augenblicklichen Drehpunktes.

Wenn ein geometrischer Körper sich in Bezug auf eine feste Ebene so bewegt, dass der Abstand jedes seiner Punkte von dieser Ebene dabei unverändert bleibt, oder die Bahnlinie jedes Punktes parallel zu jener Ebene liegt, so werden irgend welche drei (oder mehr als drei) Punkte des Körpers, welche zu irgend einer Zeit in einer parallel zu jener Ebene liegenden Ebene sich befinden, stets in dieser Ebene bleiben, und die durch jene Punkte gebildete ebene Figur wird sich dabei in ihrer Ebene verschieben. Die Lage des Körpers ist bestimmt, sobald die Lage dieser Figur bestimmt ist, und die Bewegung des ganzen Körpers lässt sich daher zurückführen auf die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene.

Wenn ABC für den Anfangspunkt und $A_1B_1C_1$ für den Endpunkt irgend eines Zeitabschnitts als Lage eines in seiner Ebene sich bewegenden Dreiecks gegeben ist, so lässt sich in dieser Ebene immer ein Punkt O nachweisen, dessen Lage so beschaffen ist, dass man durch eine Drehung um diesen Punkt das Dreieck aus der ersten in die zweite Lage überführen könnte (Fig. 17). Denn wenn man im Mittelpunkte der Verbindungslinie AA_1 ein Perpendikel auf derselben errichtet, so bildet dieses Perpendikel den geometrischen Ort aller derjenigen Punkte, welche von A und A_1 gleich weit entfernt sind, und könnte daher jeder Punkt dieses Perpendikels als Mittelpunkt einer Kreislinie gewählt werden, welche durch die beiden Punkte A und A_1 hindurchgeht. Errichtet man auf der Mitte der Verbindungslinie BB_1 ebenfalls ein Perpendikel, so wird letzteres die gleiche Eigenschaft in Bezug auf die beiden Punkte B und B_1 besitzen.

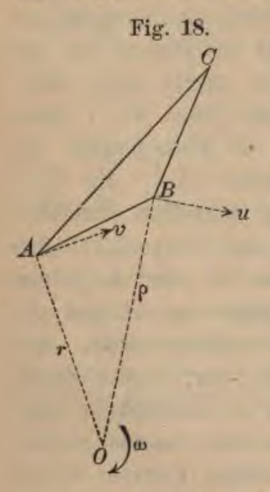
Fig. 17.



Der Durchschnittspunkt dieser beiden Perpendikel bildet also den gesuchten Drehpunkt. Denn aus der Congruenz der beiden Dreiecke OAB und OA_1B_1 ergiebt sich, dass in demselben Augenblicke, wo bei Ausführung einer solchen Drehbewegung die Linie OA in die Lage OA_1 gelangt, zugleich auch die Linie OB ihre neue Lage OB_1 erreicht.

Bei einer solchen Drehbewegung würde irgend ein Punkt des Dreiecks einen Kreisbogen beschreiben, welcher mit der in Wirklichkeit von diesem Punkte beschriebenen Bahnlinie im Allgemeinen nur den Anfangspunkt und den Endpunkt gemeinschaftlich hat, im Uebrigen aber mit derselben nicht zusammenfällt. Diese in den Zwischenpunkten stattfindende Abweichung des Kreisbogens von der wirklichen Bahnlinie wird indessen jedenfalls um so geringer sein, je näher Anfangs- und Endpunkt des Bahnstückes bei einander liegen, oder je kleiner überhaupt der betreffende Theil der Bewegung gewählt wird, welcher den Gegenstand dieser Untersuchung bildet. Der Unterschied verschwindet ganz, wenn dieser Theil unendlich klein angenommen wird, oder wenn die beiden Lagen des Dreiecks als zwei unmittelbar auf einander folgende betrachtet werden, in welchem Falle die Richtungen der Verbindungslinien AA_1 und BB_1 als die augenblicklichen Bewegungsrichtungen der beiden Punkte A und B betrachtet werden dürfen. Es kann daher die Bewegung der Figur in jedem Augenblicke aufgefasst werden als eine **Drehbewegung** um irgend einen in der Ebene liegenden Punkt, welchen man den **augenblicklichen Drehpunkt** nennt. Man findet diesen Punkt, indem man in irgend zwei beliebigen Punkten der bewegten Figur die Normalen zu ihren augenblicklichen Bewegungsrichtungen errichtet und den Durchschnittspunkt dieser beiden Normalen construirt.

Fig. 18.



Wenn mit ω die Winkelgeschwindigkeit dieser augenblicklichen Drehbewegung bezeichnet wird, so ergeben sich für die augenblicklichen Geschwindigkeit der beiden Punkte A, B (Fig. 18) die Gleichungen:

$$v = r\omega, \quad u = \rho\omega \quad \text{oder} \quad v : u = r : \rho.$$

Es verhalten sich also die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte wie ihre Abstände von dem augenblicklichen Drehpunkte, und die

augenblickliche Bewegungsrichtung eines jeden Punktes steht rechtwinckelig zu seinem Drehungshalbmesser, d. h. zu der geraden Verbindungslinie zwischen ihm und dem augenblicklichen Drehpunkte. Die Kenntniss der Lage des augenblicklichen Drehpunktes reicht also hin, um für jeden Punkt der Figur sofort die Richtung seiner augenblicklichen Geschwindigkeit zu bestimmen, und wenn man von einem dieser Punkte auch noch die Grösse der Geschwindigkeit kennt, so ist damit auch für jeden der übrigen Punkte die Grösse der Geschwindigkeit als gegeben zu betrachten.

Wenn die Figur eine fortschreitende Bewegung ausführt, d. h. wenn dieselbe sich so bewegt, dass die Verbindungslinie je zweier Punkte stets parallel zu ihrer anfänglichen Richtung bleibt, so haben sämmtliche Punkte parallele und gleich grosse Geschwindigkeiten. In diesem speciellen Falle kann die Bewegung aufgefasst werden als eine Drehung um einen unendlich entfernt liegenden Drehpunkt.

§ 10.

Anwendungen dor Theorie des augenblicklichen Drehpunktes.

Kennt man die Geschwindigkeit c, mit welcher der eine Endpunkt A der Kurbelstange einer Dampfmaschine längs des Kurbelkreises sich bewegt (Fig. 19), so kann man die Geschwindigkeit u, welche der geradlinig geführte jenseitige Endpunkt B bei irgend einer Kurbelstellung hat, berechnen aus der Gleichung:

Fig. 19.

$$\frac{u}{c} = \frac{a}{l},$$

und die Geschwindigkeit irgend eines zwischen beiden Endpunkten befindlichen Punktes P aus der Gleichung:

$$\frac{v}{c} = \frac{\rho}{l}.$$

Die Normale zur Bewegungsrichtung des Punktes A fällt mit der Richtung des Kurbelarmes CA zusammen. Der augenblickliche Drehpunkt O ist also der Durchschnittspunkt der auf der Linie BC in dem Punkte B errichteten Normalen mit der Verlängerung des Halbmessers CA.

Bei jeder von den beiden in Fig. 20 und Fig. 21 dargestellten Stangenverbindungen fällt der augenblickliche Drehpunkt O für die Bewegung, welche die Stange AB bei irgend einer Verschiebung des Stangensystems in seiner Ebene ausführt, mit dem Durchschnitts-

punkte von den Richtungen der um die festen Drehpunkte C, D drehbaren Stangen CA und DB zusammen. Wenn also z. B. in der Stange AB derjenige Punkt aufgesucht werden soll, welcher bei einer solchen Verschiebung eine im ersten Augenblicke horizontal gerichtete Bewegung erhielte, so ist es nur nöthig, den Durchschnittspunkt E der Linie AB mit der durch den Punkt O gelegten Verticalen zu construiren.

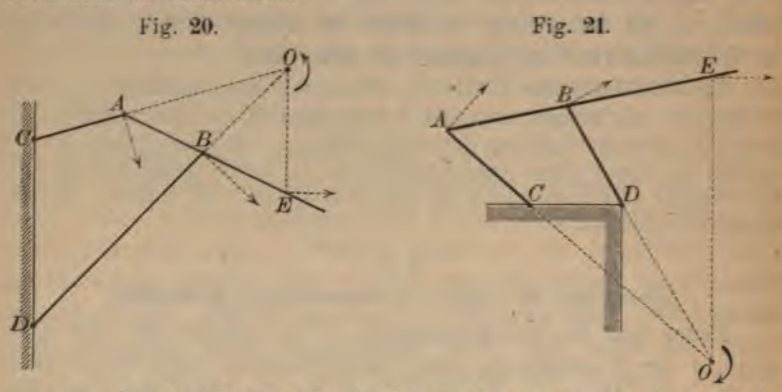


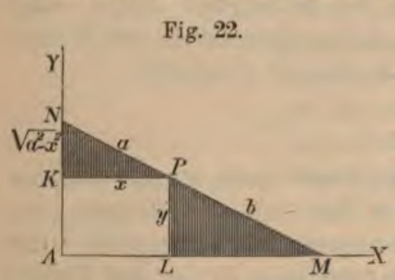
Fig. 20. Fig. 21.

Aus der Aehnlichkeit der beiden rechtwinkeligen Dreiecke MLP und PKN in Fig. 22 ergiebt sich für die Coordinaten des Punktes P die Gleichung:

$$\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}=\frac{y}{b} \text{ oder } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

welche zeigt, dass der Punkt P der geraden Linie MN eine Ellipse beschreibt, deren Halbachsen a und b sind, während die Linie sich so bewegt, dass der eine Endpunkt M stets in der Achse AX, der andere N stets in der Achse AY bleibt (Fig. 23). Um für die Stelle P die Tangente der Ellipse zu construiren, hat man den augenblicklichen Drehpunkt O für die Bewegung der Linie MN aufzusuchen und auf der Verbindungslinie OP in dem Punkte P eine Normale zu errichten. Der augenblickliche Drehpunkt O ist der Durchschnittspunkt der an den Stellen M und N resp. auf den Achsen AX und AY errichteten Normalen.

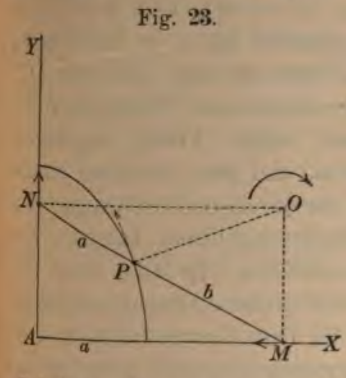
Fig. 22.



Denkt man sich eine geradlinige Stange längs einer um den festen Punkt J drehbaren Hülse verschiebbar und zugleich einen bestimmten Punkt M der Stange längs einer festen Vertikalen ge-

führt, so erkennt man, dass die Bewegungsrichtung des zur Zeit mit dem Punkte J zusammenfallenden Punktes der Stange in die Richtung der letzteren fällt, dass also die an dieser Stelle normal zur Stange gezogene gerade Linie durch den augenblicklichen Drehpunkt hindurchgehen muss. Den letzteren bildet also der Durchschnittspunkt dieser Normalen mit der Horizontalen des Punktes M (Fig. 24). Die Bewegungsrichtung irgend eines anderen Stangenpunktes P steht rechtwinkelig zu dem Drehungshalbmesser OP und bildet zugleich die Tangentenrichtung der von diesem Punkte beschriebenen Bahnlinie, der sogenannten Conchoide, für deren Krümmungsgesetz aus Fig. 24 die folgenden Gleichungen sich ergeben:

Fig. 23.



$$y = (a + x) \operatorname{tg} \alpha$$

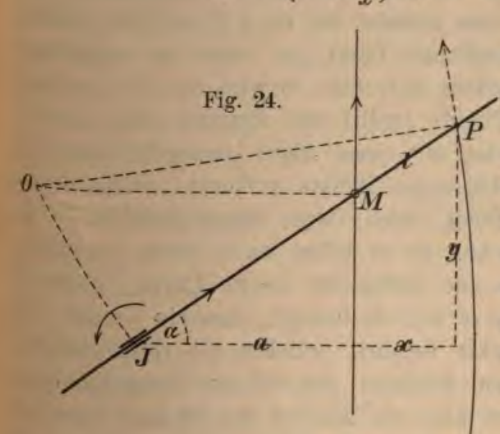
$$x = l \cos \alpha$$

$$yx = (a + x) l \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos \alpha^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}$$

$$y = \left(1 + \frac{a}{x}\right) \sqrt{l^2 - x^2}$$

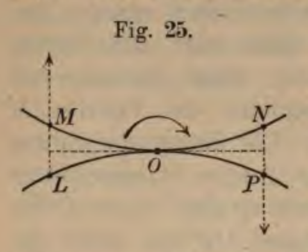
Fig. 24.



Wenn eine bewegliche ebene Curve MN auf einer in derselben Ebene liegenden festen Curve LP rollt, d. h. wenn sie dieselbe stets in einem Punkte berührt, und die Berührungsstelle auf beiden Curven stets gleiche Wegeslängen zurücklegt, so bildet der Berührungspunkt O selbst den augenblicklichen Drehpunkt (Fig. 25). Um sich davon zu überzeugen, hat man für die zu beiden Seiten unmittelbar neben der Berühungsstelle befindlichen Punkte M und

N die augenblicklichen Bewegungsrichtungen aufzusuchen. Wenn L die Stelle ist, welche der Punkt M soeben verlassen hatte, und P die Stelle, wohin der Punkt N unmittelbar nachher gelangen wird, so muss nach obiger Erklärung $\widehat{LO} = \widehat{MO}$ und $\widehat{PO} = \widehat{NO}$ sein. Denkt man sich diese Bögen unendlich klein, so findet man, dass die Verbindungslinien LM und NP als die augenblicklichen Bewegungsrichtungen jener beiden Punkte angesehen werden dürfen, und dass dieselben rechtwinkelig zu der durch die Berührungsstelle gelegten gemeinschaftlichen Tangente der beiden Curven stehen. Es fallen daher die in jenen beiden Punkten auf ihren Bewegungsrichtungen errichteten Normalen beide in diese Tangente hinein, und der Berührungspunkt O ist als der Durchschnittspunkt derselben zu betrachten. Unter allen Punkten der rollenden Curve ist demnach der jedesmalige Berührungspunkt der einzige, welcher die Geschwindigkeit Null hat.

Fig. 25.



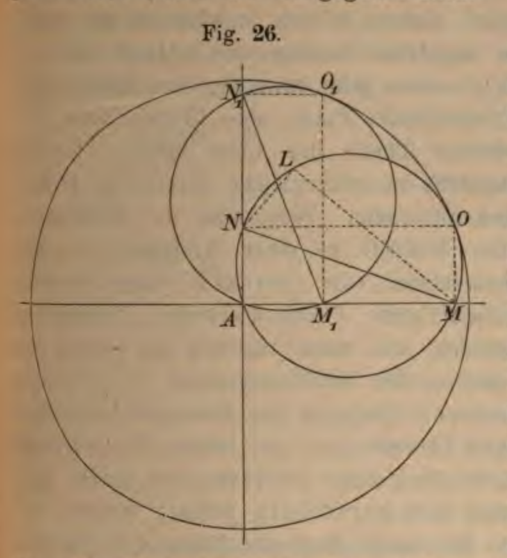
§ 11.

Die Bewegung der Figur als rollende Bewegung aufgefasst.

Während die ebene Figur in ihrer Ebene sich bewegt, wird im Allgemeinen die Lage des augenblicklichen Drehpunktes stetig sich ändern, und wenn man mittelst der im § 9 erklärten Methode für jede Lage der beweglichen Figur die Lage des zugehörigen augenblicklichen Drehpunktes aufsucht, so wird man als geometrischen Ort aller dieser Punkte irgend eine krumme Linie erhalten. Wenn man ferner in der mit jener Figur beweglich gedachten Ebene im Voraus alle diejenigen Punkte aufsucht, welche successive mit den Punkten jener festen Curve zusammenfallen — ein jeder in dem Augenblicke, wo er selbst zum festen Drehpunkte wird — so erhält man eine bewegliche zweite Curve, welche in Bezug auf jene feste Curve sich so bewegt, dass sie dieselbe stets in demjenigen ihrer Punkte berührt, welcher die Geschwindigkeit Null hat. Nach der am Schlusse des vorigen Paragraphen gegebenen Erklärung findet also ein Rollen der zweiten Curve auf der ersteren statt. Es kann daher die Bewegung der Figur aufgefasst werden als Rollen einer mit der Figur beweglich gedachten Curve auf einer festen Curve, und die ganze Bewegung

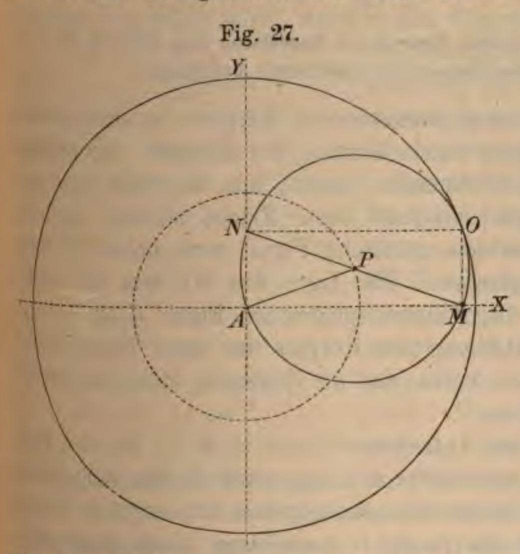
der Figur ist als bekannt zu betrachten, sobald Form und Lage jeder dieser beiden Curven gegeben sind.

Fig. 26.



Bei dem in Fig. 23 dargestellten Beispiele bildete den augenblicklichen Drehpunkt O der dem Anfangspunkte A des Coordinaten-Systems gegenüberliegende Eckpunkt eines Rechtecks, dessen Diagonale MN ist. Man erhält daher als geometrischen Ort aller Lagen des augenblicklichen Drehpunktes eine mit dem Halbmesser MN von dem Punkte A als Mittelpunkte aus beschriebene Kreislinie. Diese Kreislinie bildet für den vorliegenden Fall die feste Curve, auf der die bewegliche Curve rollt. Die bewegliche Curve findet

Fig. 27.



man, indem man für die verschiedenen Stellungen MN, $M_1 N_1$ . . . der bewegten Linie die jedesmaligen augenblicklichen Drehpunkte O, O_1 . . . construirt und sich die entstehenden rechtwinkeligen Dreiecke MNO, $M_1 N_1 O_1$ . . . sämmtlich so aufeinander gelegt denkt, dass die Hypotenusen zusammenfallen, also in der Weise, dass z. B. das Dreieck $M_1 N_1 O_1$ die Lage MNL erhalten würde (Fig. 26). Man erkennt sogleich, dass die Punkte O, L . . . alsdann eine Kreislinie bilden, welche die

Linie MN zum Durchmesser hat. Es kann daher die Bewegung der Linie MN auch so aufgefasst werden, als ob dieselbe den Durchmesser eines bewegten Kreises bildete, welcher an der Innenseite einer Kreislinie von doppelten Durchmesser entlang rollt.

In § 10 wurde gezeigt, dass jeder zwischen den beiden Endpunkten der Linie MN befindliche Punkt eine Ellipse beschreibt, deren Halbachsen die beiden Theile der Linie bilden. Da der Mittelpunkt der Linie dieselbe in zwei gleiche Abschnitte zerlegt, so beschreibt derselbe eine Kreislinie. Wenn also der Mittelpunkt der kreisförmigen Scheibe $MANO$ in einer Kreislinie um den festen Drehpunkt A herumgeführt wird (wie z. B. wenn derselbe den Endpunkt eines um den Punkt A sich drehenden Kurbelarmes bildete, der Fall sein würde), und wenn zugleich auf irgend eine Weise verhindert wird, dass an der Berührungsstelle O ein Gleiten der Scheibe längs des inneren Umfangs des äusseren Kreisringes stattfindet (was z. B. durch Verzahnungen der beiden Kreisumfänge erreicht werden könnte), so wird dabei jeder von den beiden Endpunkten des Durchmessers MN geradlinig geführt werden, der eine längs der Achse AX, der andere längs der Achse AY (Fig. 27).

§ 12.

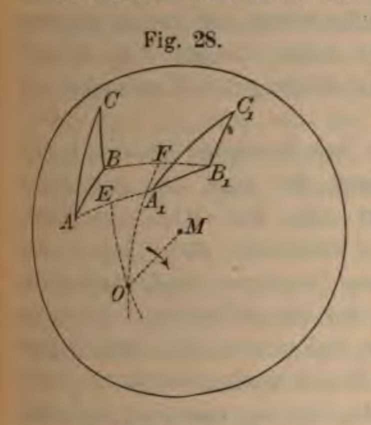
Bewegung einer sphärischen Figur in der Kugelfläche oder Drehung des geometrischen Körpers um einen festen Drehpunkt.

Bei der Drehung eines geometrischen Körpers um einen festen Drehpunkt werden irgend welche Punkte des Körpers, die anfangs gleichen Abstand vom Drehpunkte hatten, also in einer und derselben Kugelfläche lagen, stets in dieser Fläche bleiben, und die durch jene Punkte gebildete spärische Figur wird dabei in ihrer Kugelfläche sich verschieben. Die Lage des Körpers ist völlig bestimmt, sobald die Lage dieser sphärischen Figur festgelegt ist, und die Theorie der Drehung des Körpers um einen festen Punkt kann daher zurückgeführt werden auf die Bewegung einer sphärischen Figur in der Kugelfläche.

Wenn ABC für den Anfangspunkt und $A_1 B_1 C_1$ für den Endpunkt irgend eines Zeitabschnitts als Lage eines in der Kugelfläche sich bewegenden sphärischen Dreiecks gegeben ist, so lässt sich in der Kugelfläche immer ein Punkt O nachweisen, dessen Halbmesser MO eine solche Lage hat, dass man durch eine Drehung um die Achse MO die Figur aus der ersten in die zweite Lage überführen

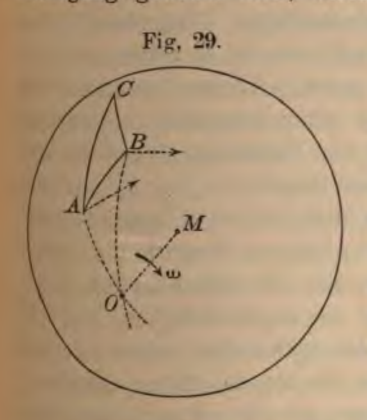
könnte (Fig. 28). Das Beweisverfahren ist ganz dasselbe, wie das in § 9 in Bezug auf die Bewegung der ebenen Figur in ihrer Ebene angewendete — nur mit dem Unterschiede, dass im vorliegenden Falle überall grösste Kreislinien an die Stelle der geraden Linien treten. Man findet nämlich jenen Punkt O, indem man die Verbindungslinien AA_1, BB_1 zieht und den Durchschnittspunkt der in den Mittelpunkten derselben errichteten Normalen EO und FO construirt — wobei die Ausdrücke „Linie" und „Normale" in dem eben erklärten Sinne aufzufassen sind.

Fig. 28.



Bei einer Drehung um die Achse MO würde das sphärische Dreieck sich so bewegen, dass hinsichtlich der Anfangslage und der Endlage eine Uebereinstimmung mit der wirklichen Bewegung stattfindet; hinsichtlich der Zwischenlagen dagegen wird im Allgemeinen ein Unterschied zwischen beiden Bewegungen sich ergeben. Diese Abweichung wird jedoch um so kleiner ausfallen, je kleiner der Theil der ganzen Bewegung gewählt wird, welcher den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung bildet. Wenn es sich also nur darum handelt, für einen unendlich kleinen Zeitabschnitt oder für einen bestimmten Augenblick die Geschwindigkeiten sämmtlicher Punkte der Figur nach Richtung und Grösse darzustellen, so kann man die Bewegung als eine Drehung auffassen um eine durch den festen Punkt gelegte Achse, welche die **augenblickliche Drehachse** genannt wird. Man findet die Lage derselben, indem man rechtwinkelig zu den Bewegungsrichtungen zweier Punkte grösste Kreislinien durch dieselben legt und den Durchschnittspunkt derselben mit dem festen Drehpunkte durch eine gerade Linie verbindet (Fig. 29).

Fig. 29.

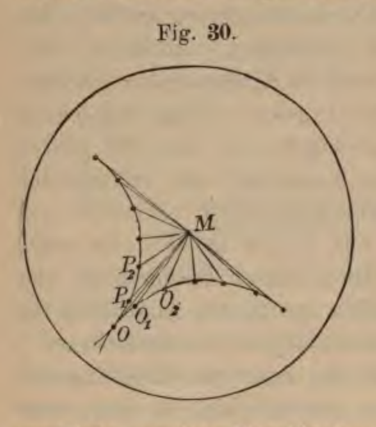


Man findet die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte der Figur, indem man die Abstände derselben von der augenblick-

lichen Drehachse, d. h. ihre Drehungshalbmesser, mit der Winkelgeschwindigkeit der augenblicklichen Drehbewegung multiplicirt. Diese Winkelgeschwindigkeit ω selbst ist als bekannt zu betrachten, sobald für einen Punkt der Figur die Geschwindigkeit und der Drehungshalbmesser gegeben sind. Wenn man also von zwei Punkten der Figur die Geschwindigkeitsrichtungen und von einem derselben auch noch die Geschwindigkeitsgrösse kennt, so kann man hiernach für jeden der übrigen Punkte die Geschwindigkeit ihrer Grösse und Richtung nach bestimmen.

Während die sphärische Figur ihre Bewegung in der Kugelfläche ausführt, wird im Allgemeinen die Lage der augenblicklichen Drehachse stetig sich ändern. Ihr Pol, d. h. ihr Durchschnittspunkt mit der Kugelfläche, beschreibt dabei irgend eine Curve $OO_1O_2\ldots$ in der Kugelfläche, und als geometrischen Ort aller auf einander folgenden Lagen der augenblicklichen Drehachse erhält man eine Kegelfläche, deren Spitze mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammenfällt (Fig. 30).

Fig. 30.



Wenn man an einer mit der Figur beweglich gedachten Kugelfläche alle diejenigen Punkte P_1, $P_2\ldots$ im Voraus aufsucht, welche successive mit jenen Polen O_1, $O_2\ldots$ nachher zusammenfallen — ein jeder in dem Augenblicke, wo er selbst zum Pole der augenblicklichen Drehachse wird — so erhält man eine zweite Curve, und die Verbindungslinien der einzelnen Punkte O, P_1, P_2 . . . mit dem Mittelpunkte M bilden eine bewegliche zweite Kegelfläche. Diese letztere berührt die erstere stets mit derjenigen Seitenlinie, welche als augenblickliche Drehachse in ihren sämmtlichen Punkten die Geschwindigkeit Null hat.

Es kann daher die Bewegung der sphärischen Figur (oder des geometrischen Körpers, welchem die Punkte der Figur angehören) aufgefasst werden als Rollen einer mit der Figur (oder dem Körper) verbunden gedachten beweglichen Kegelfläche auf einer festen Kegelfläche.

§ 13.

Freie Bewegung des geometrischen Körpers.

Wenn man sich vorstellt, dass die im vorigen Paragraphen als unbeweglich vorausgesetzte Kegelfläche eine fortschreitende Bewegung ausführt, während zugleich die mit dem Körper verbunden gedachte Kegelfläche auf jener ersteren Kegelfläche rollt, so erhält man ein Bild von der freien Bewegung des geometrischen Körpers. Wie auch immer die wirkliche Bewegung des Körpers beschaffen sein möge, dieselbe kann immer betrachtet werden als zusammengesetzt aus einer fortschreitenden Bewegung — übereinstimmend mit der wirklichen Bewegung eines beliebig auszuwählenden Punktes des Körpers — und einer gleichzeitig stattfindenden Drehung des Körpers um diesen Punkt. Zugleich ergiebt sich hieraus, dass die wirkliche Bewegung des Körpers auf unendlich viele verschiedene Arten als aus zwei sochen Einzelbewegungen zusammengesetzt aufgefasst werden kann, je nachdem der eine oder der andere Punkt des Körpers ausgewählt wird als derjenige, welcher in dem fortschreitenden Raume den relativ unbeweglichen Drehpunkt bilden soll.

Um die Geschwindigkeit irgend eines Punktes des Körpers für einen bestimmten Augenblick zu finden, hat man sich dieselbe zusammengesetzt zu denken aus den beiden einzelnen Geschwindigkeiten, welche aus jeder von den beiden Bewegungen einzeln genommen sich ergeben. Die eine derselben ist die allen Punkten gemeinschaftliche Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung, die andere ist gleich dem Producte aus der Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die augenblickliche Drehachse in den Abstand des Punktes von dieser Achse. Da es, wie oben gezeigt, unendlich viele verschiedene Arten der Zerlegung der Bewegung des Körpers in zwei Einzelnbewegungen giebt, so wird auch jede von den beiden Seitengeschwindigkeiten des Punktes auf unendlich viele verschiedene Arten sich darstellen lassen, immer aber deren Zusammensetzung zu der gleichen Resultirenden führen. Unter allen diesen Zerlegungsweisen giebt es eine, welche vorzugsweise geeignet ist, ein klares Bild von dem augenblicklichen Bewegungszustande des Körpers zu geben und über die Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten seiner Punkte Licht zu verbreiten; zu dieser gelangt man durch die nachfolgende Untersuchung.

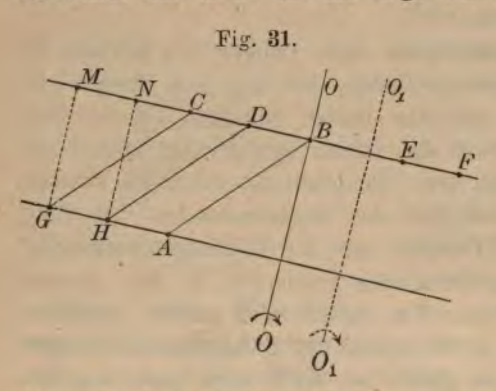
§ 14.

Die Bewegung des Körpers als Schraubenbewegung aufgefasst.

Man kann den Körper aus einer gegebenen ersten in eine gegebene zweite Stellung stets auf die Weise hinüberführen, dass man denselben zunächst eine solche geradlinig fortschreitende Bewegung ausführen lässt, bei welcher irgend ein bestimmter Punkt des Körpers, z. B. der Punkt A, in seine neue Lage B gelangt, und hierauf den Körper um diesen Punkt so dreht, dass auch die übrigen Punkte desselben in die der zweiten Stellung entsprechenden Orte einrücken. Die letztere Bewegung kann aufgefasst werden als Bewegung einer sphärischen Figur in einer Kugelfläche, für welche der Punkt B den Mittelpunkt bildet, und nach § 12 kann man immer durch den Drehpunkt eine Achse BO so legen, dass diese Lagenveränderung durch eine Drehung um diese Achse bewerkstelligt werden kann (Fig. 31).

Denkt man sich rechtwinkelig zu dieser Achse durch den Punkt B eine Ebene gelegt, so findet man, dass bei solcher Drehung irgend eine in dieser Ebene befindliche Figur in derselben sich verschiebt und z. B. aus der Lage CD übergeht in die Lage EF, welche letztere die wirkliche Endlage der Figur bildet. Die Anfangslage GH, welche diese Figur vor Ausführung der ersten von jenen zwei Bewegungen hatte, findet man, indem man dieselbe von der Lage CD aus die geradlinig fortschreitende Bewegung AB rückläufig ausführen lässt, oder indem man von ihren einzelnen Punkten $C, D \ldots$ aus die geradlinigen Stücke CG, $DH \ldots$ parallel und gleich BA abträgt. Die Endpunkte dieser Abschnitte liegen wiederum in einer Ebene, und zwar in einer durch den Punkt A parallel zu der vorigen gelegten Ebene, welche demnach ebenfalls rechtwinklig zu der Drehachse OO steht.

Fig. 31.

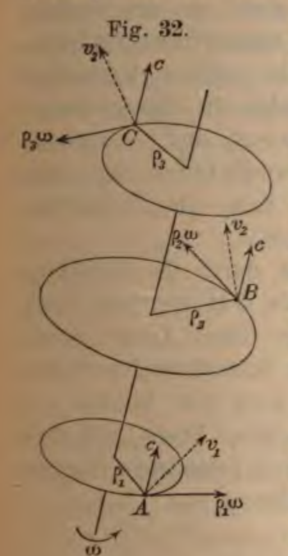


Man hätte nun die Ueberführung des Körpers aus der ersten in die zweite Lage auch auf die Weise bewerkstelligen können, dass man den Körper zunächst eine solche geradlinig fortschreitende

Bewegung ausführen lässt, bei welcher die Figur GH in der Richtung rechtwinkelig zu jenen beiden Ebenen oder parallel zur Achse OO fortschreitend in die Lage MN gelangt, und hierauf eine zweite Bewegung folgen lässt, durch welche die Figur aus der Lage MN in die vorgeschriebene Lage EF gebracht wird. Letztere Bewegung kann wiederum als Verschiebung einer ebenen Figur in ihrer Ebene, folglich (nach § 9) als Drehung um einen in der Ebene befindlichen Punkt dargestellt oder als Drehung um eine rechtwinkelig zu der Ebene gerichtete Drehachse $O_1 O_1$, welche der Achse OO parallel ist.

Denkt man sich die ganze Lagenveränderung des Körpers unendlich klein und die beiden Lagen desselben als zwei unmittelbar auf einander folgende Lagen der wirklichen Bewegung, so erkennt man, dass nach der letzteren Auffassungsweise die Bewegung des Körpers in irgend einem Zeitpunkte als zusammengesetzt betrachtet werden kann aus einer Drehung um eine bestimmte Drehachse und einem gleichzeitigen Fortschreiten in der Richtung dieser Achse. Eine solche Bewegung stimmt überein mit der Bewegung einer Schraubenspindel, welche von festliegendem Schraubenmuttergewinde umgeben ist. Es kann daher die Bewegung des Körpers in jedem Augenblicke als eine Schraubenbewegung aufgefasst werden.

Fig. 32.

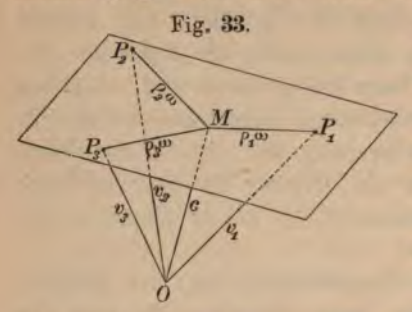


Die fortschreitende Bewegung kann als specieller Fall der Schraubenbewegung gelten, als derjenige nämlich, in welchem die Geschwindigkeit der Drehbewegung die Grösse Null hat. Der in § 9 behandelte Fall der Verschiebung einer ebenen Figur in ihrer Ebene kann ebenfalls als ein specieller Fall der Schraubenbewegung aufgefasst werden, als derjenige nämlich, in welchem die Geschwindigkeit des Fortschreitens in der Richtung der Schraubenachse die Grösse Null hat.

Um die Geschwindigkeit v_1 für irgend einen Punkt A des Körpers ihrer Grösse und Richtung nach darzustellen, hat man die Geschwindigkeit $\rho_1\omega$, welche aus der Drehbewegung für denselben sich ergiebt, mit der Geschwindigkeit c der fortschreitenden Bewegung längs der Drehachse zu einer Resultirenden zusammenzusetzen (Fig. 32). Die Construction dieser Resultirenden kann an

einer beliebigen Stelle des Raumes, z. B. an der Stelle O ausgeführt werden (Fig. 33). Man erhält dann die Geschwindigkeit v_1 als Hypotenuse eines aus den Katheten $OM \parallel = c$ und $MP_1 \parallel = \rho_1 \omega$ gebildeten rechtwinkeligen Dreiecks OMP_1. Führt man die gleiche Construction in Bezug auf einen zweiten Punkt B und in Bezug auf einen dritten Punkt C aus, so findet man, dass sämmtliche auf solche Weise entstehenden rechtwinkeligen Dreiecke die Linie OM als eine ihrer beiden Katheten gemeinschaftlich haben, und dass der geometrische Ort für die Lagen der zweiten Kathete eine Ebene bildet, welche rechtwinkelig zu OM, also rechtwinkelig zur Drehachse liegt. Es ergiebt sich hieraus der folgende Satz:

Fig. 33.



Wenn man von irgend einem Punkte des Raumes aus die sämmtlichen Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte eines Körpers nach Grösse und Richtung als Linien abträgt, so liegen die Endpunkte aller dieser Linien in einer und derselben Ebene.

Da die Lage einer Ebene durch drei nicht in eine Gerade fallende Punkte festgelegt wird, so folgt aus diesem Satze zugleich, dass der Bewegungszustand des Körpers als gegeben betrachtet werden kann, sobald von dreien seiner Punkte die Geschwindigkeiten ihrer Grösse und Richtung nach bekannt sind — vorausgesetzt, dass nicht zufällig diese drei Geschwindigkeiten einer und derselben Ebene parallel sind, in welchem Falle die Endpunkte P_1, P_2, P_3 in eine gerade Linie fallen würden.

Die Richtung der Schraubenachse ist durch die Richtung des auf die Ebene zu fällenden Perpendikels OM gegeben, und die Geschwindigkeit des Fortschreitens längs dieser Achse durch die Länge desselben gegeben. Die Lage der Schraubenachse findet man, indem man das aus den Projectionen jener drei Punkte auf diese Ebene gebildete Dreieck als eine in ihrer Ebene sich bewegende Figur behandelt und nach den in § 9 gefundenen Regeln den augenblicklichen Drehpunkt derselben aufsucht.

Capitel IV.

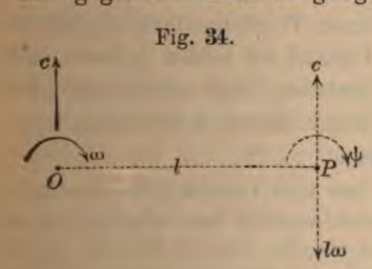
Zusammensetzung und Zerlegung der Bewegungen des geometrischen Körpers.

§ 15.

Zusammentetzung einer Drehbewegung und einer rechtwinkelig zur Drehachse gerichteten fortschreitenden Bewegung.

Denkt man sich rechtwinkelig zur Achse der Drehbewegung (also parallel zur Richtung der fortschreitenden Bewegung) eine Ebene durch den Körper gelegt, und aus irgend welchen in dieser Ebene befindlichen Punkten des Körpers eine Figur gebildet, so wird diese Figur in ihrer Ebene sich verschieben, während der Körper jene zwei Bewegungen gleichzeitig ausführt. Man findet also die resultirende Bewegung, indem man nach den in § 9 für diesen Fall gefundenen Regeln den augenblicklichen Drehpunkt für die Bewegung der Figur bestimmt. Dieser Punkt ist derjenige, bei welchem die zwei Geschwindigkeiten, welche derselbe vermöge der beiden einzelnen Bewegungen besitzt, einander gegenseitig aufheben. Man findet diesen Punkt P durch die in Fig. 34 angedeutete Construction, indem man den Abstand $OP = l$ so wählt, dass die Geschwindigkeit $l\omega$, welche der Punkt vermöge der gegebenen Drehbewegung um den Punkt O besitzt, dieselbe Grösse erhält wie die Geschwindigkeit c der gegebenen fortschreitenden Bewegung. Fasst man die Bewegung der Figur als eine Drehung um den Punkt P auf, so wird man die Winkelgeschwindigkeit ψ für diese Drehbewegung so anzunehmen haben, dass die daraus für den Punkt O sich ergebende Geschwindigkeit $l\psi$ übereinstimmt mit derjenigen Geschwindigkeit, welche derselbe vermöge der ursprünglich gegebenen beiden Bewegungen hatte. Diese letztere Geschwindigkeit ist gleich c, weil durch eine Drehung um den Punkt O für diesen selbst keine Geschwindigkeit bedingt wird. Es ist also

Fig. 34.



$$l\psi = c = l\omega$$

zu setzen, und ergiebt sich daraus, dass die resultirende Dreh-

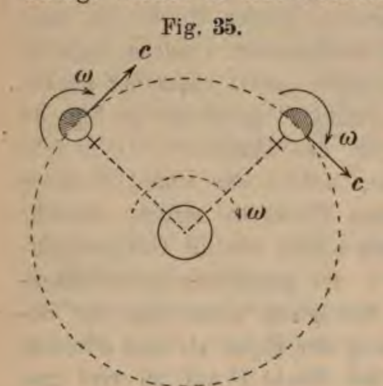
geschwindigkeit ψ mit der gegebenen ω gleiche Grösse und Richtung hat.

Die Resultirende einer Drehbewegung und einer rechtwinkelig zur Achse derselben gerichteten fortschreitenden Bewegung ist daher eine Drehbewegung um eine jener ersteren parallele Drehachse. Die resultirende Drehgeschwindigkeit hat mit der gegebenen Drehgeschwindigkeit gleiche Grösse und Richtung. Die Ebene der beiden parallelen Drehachsen steht rechtwinkelig zur Richtung der gegebenen fortschreitenden Bewegung. Den Abstand $l = \frac{c}{\omega}$ dieser beiden Achsen erhält man, indem man die Geschwindigkeit der gegebenen fortschreitenden Bewegung durch die Winkelgeschwindigkeit der gegebenen Drehbewegung dividirt.

Durch Umkehrung dieses Satzes findet man zugleich das bei der Zerlegung anzuwendende Verfahren.

Eine gegebene Drehbewegung um eine bestimmte Achse kann zerlegt werden in eine Drehbewegung um eine parallele Drehachse und eine fortschreitende Bewegung. Die Winkelgeschwindigkeit der ersteren hat mit der Winkelgeschwindigkeit der gegebenen Drehbewegung gleiche Grösse und Richtung. Die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung ist gleich dem Producte aus dieser Winkelgeschwindigkeit in den Abstand der beiden Achsen, und ihre Richtung steht rechtwinkelig zu der Ebene dieser beiden parallelen Achsen.

Fig. 35.



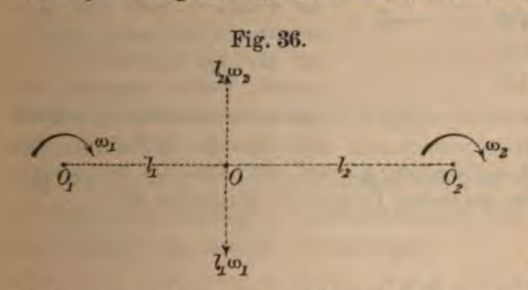
Der Mond bewegt sich so, dass er der Erde beständig dieselbe Halbkugelseite zu wendet (Fig. 35). Es würde daher, wenn die Erde selbst als ruhend betrachtet wird, die Bewegung des Mondes als eine Drehung um eine Achse aufzufassen sein, welche durch den Erdmittelpunkt geht und rechtwinkelig zur Ebene der Mondbahn steht. Statt dessen kann man die Bewegung des Mondes auch betrachten als zusammengesetzt aus einer Drehbewegung um eine durch den Mondmittelpunkt selbst gelegte, der vorigen parallele, Drehachse und einer fortschreitenden Bewegung, deren Geschwindigkeit in jedem Augenblicke mit der des Mondmittelpunktes ihrer Grösse und Richtung nach übereinstimmt.

§ 16.

Zusammensetzung zweier gleichgerichteter Drehbewegungen um parallele Drehachsen.

Denkt man sich einen Körper eine Drehbewegung um eine bestimmte Drehachse ausführend und diese Achse einem anderen Körper angehörend, welcher gleichzeitig eine Drehbewegung um eine zweite der vorigen parallele Drehachse besitzt, so kann man, wenn von dem Bewegungszustande, welchen jener erste Körper in einem bestimmten Zeitpunkte besitzt, die Rede ist, denselben so auffassen, als ob der Körper gleichzeitig diese beiden Drehbewegungen um parallele Drehachsen ausführte. Wenn man sich rechtwinkelig zu diesen Achsen eine Ebene durch den Körper gelegt, und aus irgend welchen in dieser Ebene befindlichen Punkten des Körpers eine Figur gebildet denkt, so wird durch jede der beiden Drehbewegungen einzeln genommen eine Verschiebung dieser Figur in ihrer Ebene bedingt. Folglich wird auch die resultirende Bewegung als Verschiebung einer ebenen Figur in ihrer Ebene nach den in § 9 gefundenen Regeln behandelt werden können.

Fig. 36.



Den augenblicklichen Drehpunkt O findet man durch die in Fig. **36** angedeutete Construction, indem man in der Verbindungslinie der den beiden Drehachsen entsprechenden Drehpunkte O_1 und O_2 diejenige Stelle aufsucht, bei welcher die den beiden gegebenen Drehbewegungen entsprechenden Geschwindigkeiten $l_1\,\omega_1$ und $l_2\,\omega_2$ einander gegenseitig aufheben, oder indem man diesen Abstand in zwei Abschnitte l_1 und l_2 zerlegt, die sich zu einander umgekehrt wie die beiden Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 verhalten.

Fasst man die Bewegung der Figur als eine Drehung um den Punkt O auf, so wird man die Winkelgeschwindigkeit ψ dieser Drehbewegung so zu bestimmen haben, dass die dadurch bedingten Geschwindigkeiten $l_1\,\psi$ und $l_2\,\psi$ der beiden Punkte O_1 und O_2 resp. übereinstimmen mit den wirklichen Geschwindigkeiten, welche diese Punkte vermöge der ursprünglich gegebenen beiden Bewegungen besitzen (Fig. **37**). Durch eine Drehung um den Punkt O_1 wird

keine Geschwindigkeit dieses Punktes bedingt. Es hatte also vermöge der beiden gegebenen Bewegungen der Punkt O_1 (nach Fig. 36) nur die Geschwindigkeit $(l_1 + l_2)\,\omega_2$. Ebenso ergiebt sich für die Geschwindigkeit des Punktes O_2 der Werth $(l_1' + l_2)\,\omega_1$. Also muss:

$$l_1 \psi = (l_1 + l_2)\omega_2 \text{ und } l_2 \psi = (l_1 + l_2)\omega_1$$

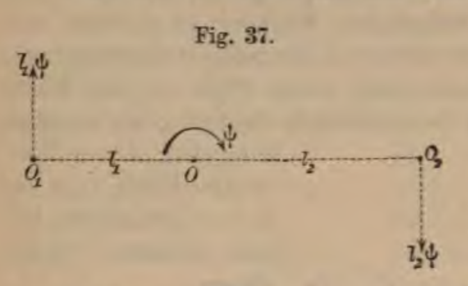
sein, und man erhält durch Addition dieser beiden Gleichungen die Bedingung:

$$(l_1 + l_2)\psi = (l_1 + l_2)\ (\omega_1 + \omega_2), \text{ oder: } \psi = \omega_1 + \omega_2.$$

Die Resultirende von zwei gleichgerichteten Drehgeschwindigkeiten um parallele Drehachsen ist also gleich der Summe derselben.

Man hätte zu dieser Beweisführung auch des im vorigen Paragraphen gefundenen Satzes sich bedienen können, indem man festsetzt: es soll jede der beiden gegebenen Drehbewegungen zerlegt werden in eine Drehbewegung um den Punkt O und eine fortschreitende Bewegung; zugleich soll die Lage des Punktes O so gewählt werden, dass die beiden fortschreitenden Bewegungen einander aufheben. Man würde dann unmittelbar zu dem Resultate gelangt sein: dass die Resultirende gleich der Summe der beiden gegebenen Drehgeschwindigkeiten ist.

Fig. 37.

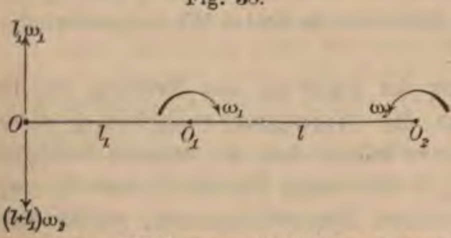


§ 17.

Zusammensetzung zweier entgegengesetzt gerichteter Drehbewegungen um parallele Drehachsen.

Wenn die beiden Drehgeschwindigkeiten ω_1 und ω_1 entgegengesetzte Drehungsrichtungen haben, so kann man, wenn man will, die eine als positiv, die andere als negativ betrachten und die Gleichungen des vorigen Paragraphen als unmittelbar auch für diesen Fall gültig ansehen. Will man statt dessen zum Aufsuchen der Resultirenden den directen Weg einschlagen, so wird man zunächst auf gleiche

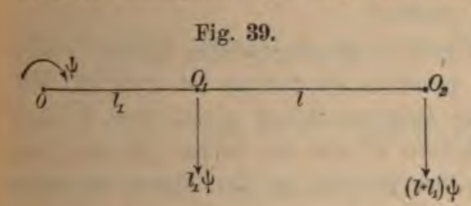
Fig. 38.



Weise wie im vorigen Paragraphen die Lage des augenblicklichen Drehpunktes O festzustellen haben (Fig. 38). Ob derselbe links von dem Punkte O_1 oder rechts von dem Punkte O_2 zu suchen ist, das wird davon abhängen, welche von den beiden gegebenen Drehgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 die grössere ist. Wenn ω_1 die grössere von beiden ist, so wird der augenblickliche Drehpunkt O links von dem Punkt O_1 liegen; denn die beiden Geschwindigkeiten $l_1 \omega_1$ und $l_2 \omega_2$ sollen einander aufheben; und es muss daher der grösseren Winkelgeschwindigkeit der kleinere Abstand als Factor beigesellt werden, um das gleiche Product zu liefern.

Die Drehgeschwindigkeit ψ der resultirenden Drehbewegung um den Punkt O muss gleiche Richtung haben mit der grösseren Drehgeschwindigkeit ω_1; denn es muss die Geschwindigkeit $l_1 \psi$, welche für den Punkt O_1 durch die resultirende Bewegung bedingt wird, übereinstimmen nach Grösse und Richtung mit der Geschwindigkeit $l \omega_2$, welche für diesen Punkt aus den beiden gegebenen Bewegungen sich ergiebt; und ebenso muss für den Punkt O_2 die aus der Resultirenden sich ergebende Geschwindigkeit $(l_1 + l)\psi$ übereinstimmen mit der durch die zwei gegebenen Bewegungen bedingten Geschwindigkeit $l \omega_1$ (Fig. 39). Wenn man die erstere der beiden Gleichungen:

Fig. 39.



$$l_1 \psi = l \omega_2, \quad (l + l_1)\psi = l \omega_1$$

von der letzteren subtrahirt, so erhält man für die resultirende Drehgeschwindigkeit die Gleichung:

$$l \psi = l(\omega_1 - \omega_2), \text{ oder: } \psi = \omega_1 - \omega_2.$$

Die Resultirende von zwei entgegengesetzten Drehgeschwindigkeiten mit parallelen Drehachsen ist also gleich deren Differenz und stimmt ihrer Richtung nach mit der grösseren von beiden überein.

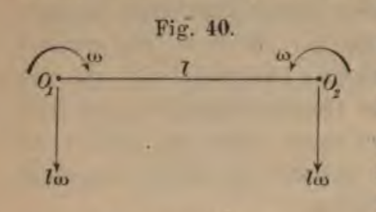
Für den Abstand der Drehachse der resultirenden Drehbewegung von der Achse O_1 ergiebt sich aus obigen Gleichungen der Werth:

$$l_1 = \frac{l \omega_2}{\psi} = \frac{l \omega_2}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Dieser Abstand wird um so grösser, je kleiner die Differenz der

beiden gegebenen Drehgeschwindigkeiten ist. Er wird unendlich gross, und die resultirende Drehgeschwindigkeit selbst wird gleich Null, wenn die beiden gegebenen Drehgeschwindigkeiten gleiche Grösse haben. Aus Fig. **40** erkennt man, dafs eine solche mit der Drehgeschwindigkeit Null erfolgende Drehbewegung um eine unendlich entfernte Drehachse als eine fortschreitende Bewegung zu deuten ist. Denn sämmtliche Punkte der Achse O_1 sowohl wie der Achse O_2 — folglich auch sämmtliche Punkte des Körpers überhaupt — haben in diesem Falle die gemeinschaftliche Geschwindigkeit:

Fig. 40.



$$l\omega = c.$$

Die Resultirende von zwei entgegengesetzten gleich grossen Drehgeschwindigkeiten um parallele Drehachsen ist also eine fortschreitende Bewegung, deren Geschwindigkeit gleich dem Producte aus dem Abstande beider Achsen in eine der beiden gleichen Drehgeschwindigkeiten ist, und rechtwinkelig zu der Ebene der beiden parallelen Achsen gerichtet ist.

Aus der Umkehrung dieses Satzes ergiebt sich zugleich: dass jede gegebene fortschreitende Bewegung eines Körpers aufgefasst werden kann als gleichzeitiges Vorhandensein eines Paares von zwei gleich grossen entgegengesetzten Drehgeschwindigkeiten um parallele Drehachsen, sobald dieselben so angenommen werden, dass das Product „Drehgeschwindigkeit mal Abstand beider Achsen" gleich der Geschwindigkeit jener fortschreitenden Bewegung ist, und die Ebene der beiden Achsen zugleich rechtwinkelig zu derselben steht.

§ 18.

Zusammensetzung zweier Drehgeschwindigkeiten, deren Achsen einander schneiden. Parallelogramm der Drehgeschwindigkeiten.

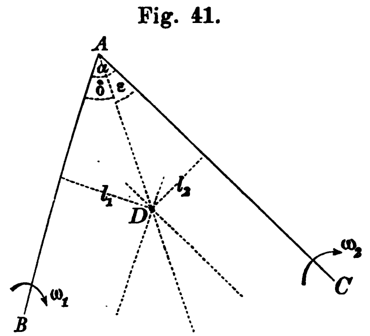
In der Ebene der beiden Drehachsen AB und AC giebt es ebenfalls eine geradlinige Reihe von Punkten, welche sämmtlich die Geschwindigkeit Null haben (Fig. **41**). Denn, wenn l_1 und l_2 irgend zwei Längengrössen sind, welche der Bedingungsgleichung:

$$l_1\,\omega_1 = l_2\,\omega_2$$

genügen, so werden die in jener Ebene parallel zu den Achsen, resp.

in den Abständen l_1 und l_2 gelegten geraden Linien einander in einem Punkte D schneiden, dessen zwei entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeiten einander aufheben. Wenn aber die beiden Punkte A und D des Körpers im Ruhestande sich befinden, so muss auch jeder von den übrigen Punkten der geraden Linie AD im Ruhezustande sich befinden, und es bildet daher diese Linie die Drehachse für die resultirende Drehbewegung. Diese Linie zerlegt den von den Drehachsen der beiden gegebenen Bewegungen eingeschlossenen Winkel α in zwei Theile δ und ε, für deren Sinus-Zahlen:

Fig. 41.



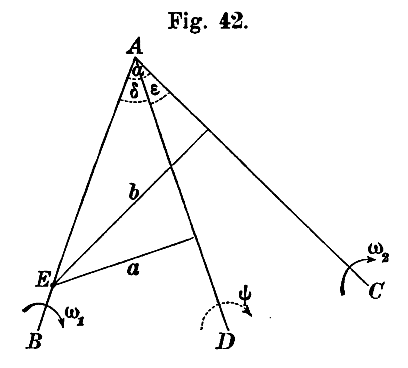
$$\sin\delta = \frac{l_1}{AD} \text{ und } \sin\varepsilon = \frac{l_2}{AD}$$

aus obiger Bedingungsgleichung das Verhältniss sich ergiebt:

$$\frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Die Winkelgeschwindigkeit ψ der resultirenden Drehbewegung ist so zu bestimmen, dass für irgend einen Punkt E der Achse AB die durch die resultirende Bewegung bedingte Geschwindigkeit $a\psi$ übereinstimmt mit der Geschwindigkeit $b\omega_2$, welche dieser Punkt vermöge der ursprünglich gegebenen beiden Bewegungen besitzt (Fig. 42). Die hieraus sich ergebende Bedingungsgleichung:

Fig. 42.



$$\frac{\psi}{\omega_2} = \frac{b}{a}$$

nimmt, wenn auf der rechten Seite Zähler und Nenner durch AE dividirt werden, die Form an:

$$\frac{\psi}{\omega_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\delta}.$$

Das gleiche Verfahren auf irgend einen in der Achse AC befindlichen Punkt angewendet würde zu der Gleichung geführt haben:

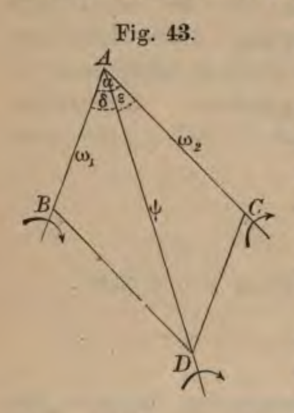
$$\frac{\psi}{\omega_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \varepsilon}.$$

Durch Vereinigung dieser beiden Gleichungen erhält man die Proportion:

$$\psi : \omega_1 : \omega_2 = \sin \alpha : \sin \varepsilon : \sin \delta.$$

Genau dieselben Beziehungen sind es, welche auch stattfinden würden zwischen der Diagonale AD und den Seiten AB, AC eines Parallelogramms (Fig. 43), welches man erhält, indem man auf den gegebenen Achsen von ihrem Durchschnittspunkte aus die Strecken AB, AC abträgt, deren Längenzahlen übereinstimmen mit den Winkelzahlen der gegebenen Drehgeschwindigkeiten, und durch Hinzufügung der gegenüberliegenden Parallel-Seiten CD, BD die Parallelogramm-Contruction vervollständigt.

Fig. 43.

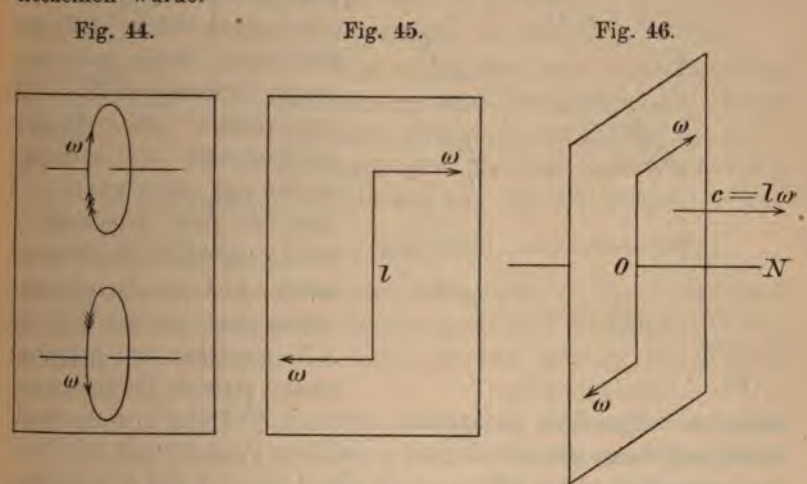


Es wird also — nicht nur der Grösse nach, sondern auch der Lage ihrer Drehachse nach — die resultirende Drehgeschwindigkeit ψ geometrisch dargestellt durch die Diagonale des aus den beiden gegebenen Drehgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 auf die eben erklärte Weise gebildeten Parallelogramms. Dieser Satz wird das Parallelogramm der Drehgeschwindigkeiten genannt.

Es folgt aus diesem Satze, dass bei der Bestimmung der Resultirenden von zwei Drehgeschwindigkeiten, deren Achsen einander schneiden, dasselbe Verfahren angewendet werden kann, wie dasjenige, welches bei der Bestimmung der resultirenden Geschwindigkeit von zwei fortschreitenden Bewegungen anzuwenden sein würde; und nicht nur für die Resultirende von zweien, sondern auch für die Resultirende von beliebig vielen Bewegungen findet diese Gleichheit des Verfahrens Statt, da man durch Wiederholung der Parallelogramm-Construction letzteren Fall auf ersteren zurückführen kann. Es darf daher der in § 4 gefundene Satz des Parallelepipedons der Geschwindigkeiten ohne Weiteres auch auf Drehgeschwindigkeiten übertragen werden, deren Achsen in einem und demselben Punkte einander schneiden.

Man hat jedoch, wenn man auf die oben beschriebene Weise die Drehgeschwindigkeiten durch gerade Linien von bestimmter Grösse, Richtung und Lage geometrisch darstellt, zu beachten, dass es in jeder geraden Linie zwei entgegengesetzte Richtungen giebt, und dass man nur dann zu einem richtigen Resultate gelangen wird, wenn man bei jeder von den gegebenen Drehgeschwindigkeiten stets auf gleiche Weise verfährt hinsichtlich der Auswahl desjenigen Zweiges der Achse, welcher die betreffende Drehgeschwindigkeit ihrer Richtung nach darstellen soll; z. B. indem man stets denjenigen Achsenzweig wählt, von dessen unendlich fernem Endpunkte aus betrachtet die betreffende Drehung als eine von links nach rechts gerichtete oder mit der Bewegung des Uhrzeigers übereinstimmende erscheinen würde.

Fig. 44. Fig. 45. Fig. 46.



Beispielsweise wurde nach dieser Regel das in in Fig. 44 dargestellte Paar von zwei entgegengesetzten Drehgeschwindigkeiten auf die in Fig. 45 angedeutete Weise durch zwei geradlinige Pfeile darzustellen sein. Dieses Drehungspaar repräsentirt (nach § 17) eine fortschreitende Bewegung von der Geschwindigkeit:

$$c = l\omega$$

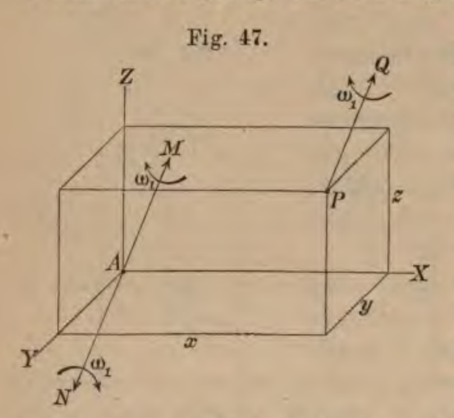
in der Richtung rechtwinkelig zur Ebene der beiden Drehachsen, und zwar nach derjenigen Seite hin, von welcher aus betrachtet die Drehungsvorrichtung des (als Kräftepaar aufgefassten) Drehungspaars als von links nach rechts herum gerichtet erscheinen würde. Von den beiden entgegengesetzten Zweigen der Normalen ist es also der von O nach N gerichtete Zweig, welcher die Richtung der Geschwindigkeit c anzeigt (Fig. 46).

§ 19.

Zusammensetzung von Drehgeschwindigkeiten bei beliebiger Lage der Drehachsen. Bestimmung der Resultirenden von beliebigen gegebenen Bewegungen eines Körpers.

Wenn man sich auf die im vorigen Paragraphen erklärte Weise eine jede der gegebenen Drehgeschwindigkeiten durch eine gerade Linie von bestimmter Länge, Richtung und Lage geometrisch dargestellt denkt, und wenn z. B. die geradlinige Strecke $PQ = \omega_1$ in Fig. 47 als Repräsentant der einen von denselben gegeben wäre, so könnte man, ohne Etwas an der Bewegung zu ändern, von dem Coordinaten-Ursprunge aus nach entgegengesetzten Seiten hin parallel und gleich PQ die beiden geradlinigen Stücke AM, AN, hinzufügen, deren jedes wiederum in derselben Weise als Repräsentant einer Drehgeschwindigkeit ω_1 betrachtet werden soll. Man würde dann statt der einen gegebenen — drei Drehgeschwindigkeiten erhalten, und von diesen dreien bilden zwei, nämlich PQ und AN, ein Paar von entgegengesetzt gleichen Drehgeschwindigkeiten um parallele Drehachsen, also nach § 17 eine fortschreitende Bewegung, deren Geschwindigkeit gleich dem Produkte aus der Drehgeschwindigkeit in den Abstand der beiden Achsen ist und rechtwinkelig zur Ebene derselben gerichtet ist.

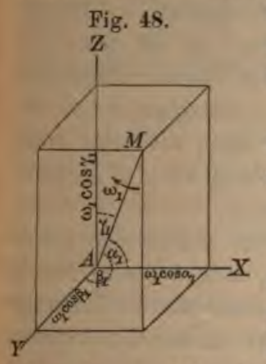
Fig. 47.



Wenn man auf gleiche Weise in Bezug auf jede der übrigen gegebenen Drehgeschwindigkeiten verfährt, so erhält man im Ganzen eine ebenso grosse Anzahl von fortschreitenden Bewegungen, als die Zahl der gegebenen Drehbewegungen betrug, und ausserdem noch ebenso viele Drehbewegungen um Achsen, die einander sämmtlich in dem Punkte A schneiden. Denkt man sich die Geschwindigkeiten der sämmtlichen fortschreitenden Bewegungen nach der in § 4 gefundenen Regel zu ihrer Resultirenden v zusammengesetzt und ebenso die Geschwindigkeiten der Drehbewegungen um die im Punkte A einander schneidenden Achsen mittelst der im vorigen Paragraphen gefundenen Methode zu ihrer Resulirenden ω zusammen-

gesetzt, so erkennt man, dass die Resultirende sämmtlicher gegebenen Drehbewegungen aufgefasst werden kann als eine mit der Winkelgeschwindigkeit ω stattfindende Drehbewegung um eine durch den willkürlich gewählten Punkt A gelegte Drehachse, verbunden mit einer gleichzeitig vorhandenen fortschreitenden Bewegung, deren Geschwindigkeit v ist. (Diese resultirende Bewegung kann man dann — wenn es wünschenswerth erscheinen sollte — mittelst des in § 14 erklärten Verfahrens auch wieder auf die Form einer Schraubenbewegung bringen).

Fig. 48.



Für die drei Seitengeschwindigkeiten der Drehgeschwindigkeit $AM = \omega_1$ ergeben sich aus Fig. 48 die Werthe:

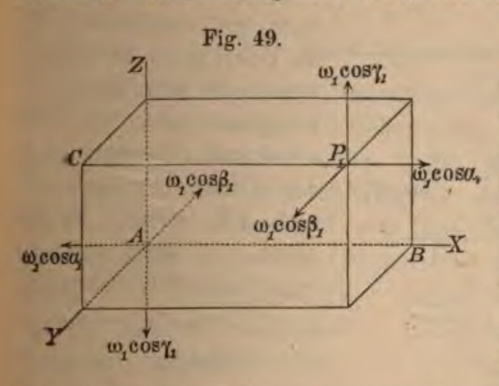
$$\omega_1 \cos \alpha_1, \quad \omega_1 \cos \beta_1, \quad \omega_1 \cos \gamma_1.$$

Man erhält also, wenn man die analoge Bezeichnungsweise hinsichtlich der übrigen gegebenen Drehgeschwindigkeiten $\omega_2, \omega_3 \ldots$ anwendet, für die drei Seitengeschwindigkeiten der resultirenden Drehbewegung die Gleichungen:

$$\omega_x = \Sigma(\omega \cos \alpha), \quad \omega_y = \Sigma(\omega \cos \beta), \quad \omega_z = \Sigma(\omega \cos \gamma).$$

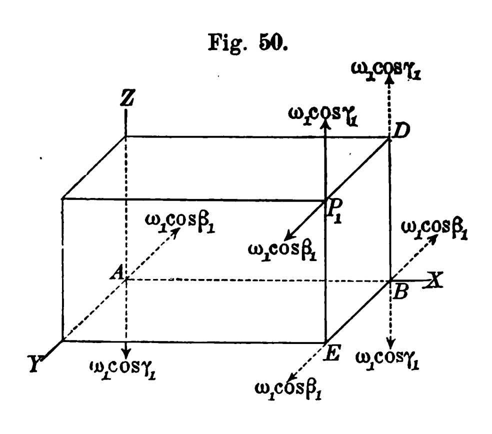
Um von den drei Seitengeschwindigkeiten v_x, v_y, v_z der resultirenden fortschreitenden Bewegung zunächst diejenige zu finden, welche in die Richtung AX fällt, hat man jede der beiden Drehgeschwindigkeiten $PQ = \omega_1$ und $AN = \omega_1$, welche das erste Paar bilden, in ihre drei Seitengeschwindigkeiten zu zerlegen und die Beiträge zu bestimmen, welche jedes der auf solche Weise entstehenden drei Paare zu der Geschwindigkeit v_x liefert. Man erkennt aus Fig. 49 sofort, dass das aus den beiden Geschwindigkeiten $\omega_1 \cos \alpha_1$ bestehende Paar keinen solchen Beitrag liefert, weil die durch dieses Paar repräsentirte fortschreitende Bewegung rechtwinkelig zu der Diagonal-Ebene ABP_1C, folglich auch rechtwinkelig zur Achse AX gerichtet ist. Wenn man dann

Fig. 49.



zu den noch übrig bleibenden beiden Paaren an den Punkten B, D, E die in Fig. 50 durch punktirte Linien dargestellten vier Geschwindigkeiten hinzufügt (welche paarweise einander aufhebend an der Bewegung Nichts ändern), so erkennt man ferner, dass von den auf solche Weise entstehenden vier Paaren es nur die in Fig. 51 dargestellten beiden Paare sind, welche zu der Seitengeschwindigkeit v_x Beiträge liefern, da die den andern beiden Paaren entsprechenden fortschreitenden Bewegungen wiederum rechtwinkelig zu AX gerichtet sind.

Fig. 50.

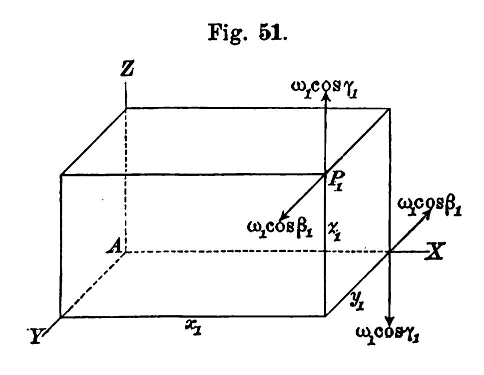


Von den beiden Beiträgen, welche die in Fig. 51 dargestellten Drehungspaare zu der Geschwindigkeit v_x liefern, ist der eine positiv und hat die Grösse $+ \omega_1 \cos \gamma_1 \, y_1$; der andere ist negativ und hat die Grösse $- \omega_1 \cos \beta_1 \, z_1$. Man erhält also durch Summation der von sämmtlichen gegebenen Drehbewegungen gelieferten Beiträge für v_x den Werth:

$$v_x = \Sigma \, (\omega \cos \gamma \, y - \omega \cos \beta \, z).$$

Genau dasselbe Verfahren kann man anwenden, um die Beiträge zu bestimmen, welche die einzelnen Drehungspaare zu den fortschreitenden Bewegungen in den Achsenrichtungen AY und AZ liefern. Es ergeben sich dann auf analoge Weise die Gleichungen:

Fig. 51.



$$v_y = \Sigma \, (\omega \cos \alpha \, z - \omega \cos \gamma \, x),$$
$$v_z = \Sigma \, (\omega \cos \beta \, x - \omega \cos \alpha \, y).$$

Die Geschwindigkeit der resultirenden fortschreitenden Bewegung hat also die Grösse:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

und die Winkel λ, μ, ν, welche ihre Richtung resp. mit den drei

Coordinaten-Achsen AX, AY, AZ einschliesst, sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\cos\lambda = \frac{v_x}{v}, \quad \cos\mu = \frac{v_y}{v}, \quad \cos\nu = \frac{v_z}{v}.$$

Die Geschwindigkeit der resultirenden Drehbewegung hat die Grösse:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2},$$

die Drehachse derselben geht durch den Punkt A und schliesst daselbst mit den drei Coordinaten-Achsen resp. die Winkel α, β, γ, ein, welche zu bestimmen sind aus den Gleichungen:

$$\cos\alpha = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \cos\beta = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \cos\gamma = \frac{\omega_z}{\omega}.$$

Wären ausser den gegebenen Drehbewegungen noch fortschreitende Bewegungen gegeben gewesen, so würde man die Geschwindigkeiten derselben zu einer Resultirenden zusammen zu setzen und diese wiederum mit der Geschwindigkeit v zu einer neuen Resultirenden zu vereinigen haben. Da nach § 13 und § 14 eine jede beliebige gegebene Bewegung eines Körpers stets aufgefasst werden kann als zusammengesetzt aus einer Drehbewegung und einer fortschreitenden Bewegung, so ist die Aufgabe: von beliebigen gegebenen Bewegungen eines Körpers die Resultirende zu bestimmen, hiermit in ihrer allgemeinsten Form als gelöst zu betrachten.

§ 20.

Beschleunigungscentrum.

Nach § 11 kann die Bewegung einer ebenen Figur in ihrer Ebene aufgefasst werden als Rollen einer mit der Figur verbundenen beweglichen Curve auf einer festen Curve. Wenn u die Geschwindigkeit ist, mit welcher die den augenblicklichen Drehpunkt der in ihrer Ebene sich bewegenden Figur bildende Berührungsstelle der beiden Curven längs der festen Curve fortrückt, so ist $\widehat{OO_1} = u\,dt$ der Weg, welchen dieselbe während des unendlich kleinen Zeitraumes dt zurücklegt (Fig. 52). Der Punkt O in der beweglichen Ebene ist derjenige Punkt, welcher im Anfange der Zeit dt die Geschwindigkeit Null hatte, und dieser Punkt erreicht am Ende der Zeit dt die der Drehung um den neuen Drehpunkt O_1 entsprechende Peripherie-Geschwindigkeit:

$$\widehat{OO_1}\,(\omega + d\omega) = u\,dt\,(\omega + d\omega).$$

Das Fortrücken des augenblicklichen Drehpunktes kann daher aufgefasst werden als eine neben der Drehbewegung stattfindende fortschreitende Bewegung von der Beschleunigung:

$$\frac{u\,dt\,(\omega + d\omega)}{dt} \text{ oder } u\omega$$

in der Richtung der gemeinschaftlichen Normalen der beiden Curven.

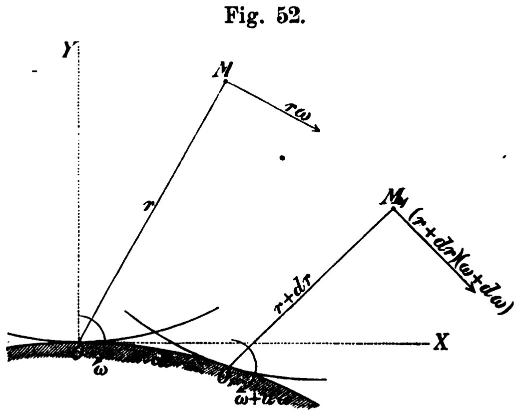


Fig. 52.

Wenn der augenblickliche Drehpunkt seine Lage nicht änderte, so würde die Beschleunigung des Punktes M (nach § 6) aus der Centripetalbeschleunigung $r\omega^2$ und der Tangentialbeschleunigung $r\frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon$ sich zusammensetzen. Die Totalbeschleunigung des Punktes M setzt sich daher aus den drei Beschleunigungen: $u\omega$, $r\omega^2$ und $r\varepsilon$ zusammen. Aus Fig. 53 erhält man hiernach für die Beschleunigungen in den Richtungen der beiden Coordinaten-Achsen die Gleichungen:

Fig. 53.

1) $p_x = r\varepsilon \sin\alpha - r\omega^2 \cos\alpha$,

2) $p_y = u\omega - r\omega^2 \sin\alpha - r\varepsilon \cos\alpha$,

welche nach Substitution der Werthe $r\cos\alpha = x$ und $r\sin\alpha = y$ die folgenden Formen annehmen:

3) $p_x = \varepsilon y - \omega^2 x$,

4) $p_y = u\omega - \omega^2 y - \varepsilon x$.

Für $x = 0$ und $y = 0$ wird $p_x = 0$ und $p_y = u\omega$. Der augenblickliche Drehpunkt, welchen man auch das Geschwindigkeitscentrum nennen kann, hat also nur die Beschleunigung $u\omega$ in der Richtung der Y-Achse.

Wenn man $p_x = 0$ setzt, so erhält man für den geometrischen

Ort aller derjenigen Punkte, deren Beschleunigungen parallel zur Y-Achse gerichtet sind, die Gleichung:

$$5)\quad y = \frac{\omega^2}{\varepsilon} \cdot x,$$

welche zeigt, dass alle diese Punkte in einer geraden Linie liegen vom Steigungsverhältniss:

$$6)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{\varepsilon}.$$

Wenn man ein anderes Mal $p_y = 0$ setzt, so erhält man für den geometrischen Ort aller derjenigen Punkte, deren Beschleunigungen parallel zur X-Achse gerichtet sind, die Gleichung:

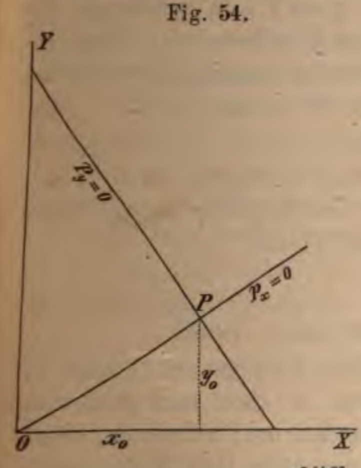
$$7)\quad y = \frac{u}{\omega} - \frac{\varepsilon}{\omega^2} x,$$

welche zeigt, dass alle diese Punkte ebenfalls in einer geraden Linie liegen, und zwar vom Steigungsverhältniss:

$$8)\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Diese beiden geraden Linien sind also rechtwinkelig zu einander gerichtet und schneiden einander in einem Punkte P, für welchen die Bedingungsgleichungen $p_x = 0$ und $p_y = 0$ beide gleichzeitig erfüllt sind. Dieser Punkt P wird das **Beschleunigungscentrum** genannt, insofern derselbe unter allen Punkten der beweglichen Ebene der einzige ist, dessen Totalbeschleunigung die Grösse Null hat (Fig. 54). Für die Coordinaten dieses Punktes erhält man durch Auflösung der beiden Gleichungen 5) und 7), indem man darin $x = x_0$ und $y = y_0$ setzt, die Werthe:

Fig. 54.



$$9)\quad x_0 = \frac{\varepsilon u \omega}{\omega^4 + \varepsilon^2},$$

$$10)\quad y_0 = \frac{u \omega^3}{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Wenn man $x = x_0 + \xi$ und $y = y_0 + \eta$ setzt, so erhält man für die Beschleunigungen p_x und p_y die Ausdrücke:

$$11)\quad p_x = \varepsilon (y_0 + \eta) - \omega^2 (x_0 + \xi),$$

$$12)\quad p_y = u\omega - \omega^2 (y_0 + \eta) - \varepsilon (x_0 + \xi),$$

welchen man nach Substitution der oben für x_0 und y_0 gefunden Werthe auch die folgenden Formen geben kann:

$$13)\quad p_x = \varepsilon\eta - \omega^2\xi,$$

$$14)\quad p_y = -\varepsilon\xi - \omega^2\eta.$$

Zu denselben Resultaten würde man gelangen, wenn man a nähme, dass die bewegliche Ebene um den Punkt P mit (Winkelgeschwindigkeit ω und mit der Winkelbeschleunigung ε si dreht, in welchem Falle die Totalbeschleunigung des Punktes aus der Centripetalbeschleu gung $\rho\omega^2$ und der Tangentialb schleunigung $\rho\varepsilon$ sich zusamme setzen würde; denn nach Fig. würden aus dieser Annahme die f genden Gleichungen sich ergebe

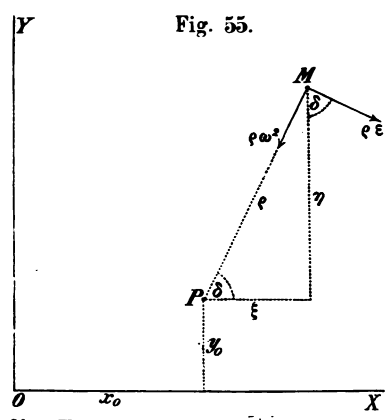


Fig. 55.

$$15)\quad p_x = \rho\varepsilon \sin\delta - \rho\omega^2 \cos\delta,$$

$$16)\quad p_y = -\rho\varepsilon\cos\delta - \rho\omega^2 \sin$$

aus welchen man nach Subs tution der Werthe $\rho\cos\delta =$ und $\rho\sin\delta = \eta$ wiederum (obigen Werthe erhält. Nach d beiden Gleichungen 13) und 14) h die Totalbeschleunigung des Punktes M die Grösse:

$$17)\quad p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \rho\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass alle diejenigen Punkte, deren Tot beschleunigungen gleich gross sind, in einer Kreislinie liegen, der Mittelpunkt das Beschleunigungscentrum bildet.

§ 21.

Wendekreis und Wechselkreis (Bresse'sche Kreise).

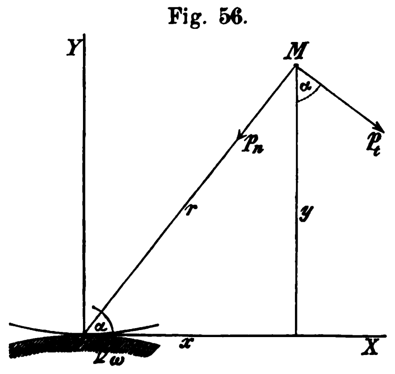


Fig. 56.

Die Totalbeschleunigung d Punktes M kann man sich au in die normal zu seiner Bah linie gerichtete Beschleunigung und die tangenial zu derselb gerichtete Beschleunigung p_t ze legt denken (Fig. 56). Für die beiden Seitenbeschleunigungen e geben sich aus Fig. 53 die Gl chungen:

$$1)\quad p_n = r\omega^2 - u\omega\sin\alpha,$$

$$2)\quad p_t = r\varepsilon \quad - u\omega\cos\alpha,$$

welche nach Substitution der Werthe $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ und $\sin\alpha = \frac{y}{r}$ die folgenden Formen annehmen:

$$3)\quad p_n = r\omega^2 - \frac{u\omega y}{r},$$

$$4)\quad p_t = r\varepsilon - \frac{u\omega x}{r}.$$

Indem man $p_n = 0$ setzt, erhält man für den geometrischen Ort aller derjenigen Punkte, welche nur Tangentialbeschleunigungen besitzen, die Gleichung:

$$5)\quad \frac{uy}{\omega} = r^2,$$

welcher man nach Substitution des Werthes $r^2 = x^2 + y^2$ auch die folgende Form geben kann:

$$6)\quad x^2 = \frac{uy}{\omega} - y^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dass alle jene Punkte in einer Kreislinie liegen vom Halbmesser:

$$7)\quad R = \frac{u}{2\omega}.$$

Nach § 6 entspricht dem Werthe $p_n = 0$ ein unendlich grosser Krümmungshalbmesser der Bahnlinie, wenn die Geschwindigkeit v eine endliche Grösse besitzt. Jener Kreis kann daher der Wendekreis genannt werden, insofern im Allgemeinen jeder Punkt dieser Kreislinie in dem betreffenden Zeitpunkte einen Wendepunkt seiner Bahnlinie erreicht. Einen Ausnahmefall bildet das dieser Kreislinie ebenfalls angehörende Geschwindigkeitscentrum, welches in dem betreffenden Zeitpunkte eine Spitze seiner Bahnlinie erreicht. Der Gleichung des Wendekreises kann man auch die folgende Form geben:

$$8)\quad x^2 = 2Ry - y^2,$$

und dieselbe zeigt, dass der Mittelpunkt des Wendekreises in der Y-Achse liegt.

Wenn man ein anderes Mal $p_t = 0$ setzt, so erhält man für den geometrischen Ort aller derjenigen Punkte, welche nur Normalbeschleunigungen besitzen, die Gleichung:

$$9)\quad \frac{u\omega x}{\varepsilon} = r^2,$$

welcher man nach Substitution des Werthes $r^2 = x^2 + y^2$ auch die folgende Form geben kann:

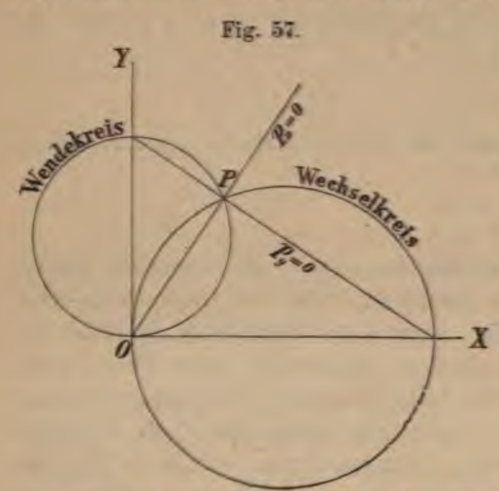
$$10)\quad y^2 = \frac{u\omega}{\varepsilon}x - x^2$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Punkte, deren Tangentialbeschleunigungen die Grösse Null besitzen, ebenfalls in einer Kreislinie liegen, und zwar in einer Kreislinie vom Halbmesser:

$$11)\quad \mathfrak{R} = \frac{u\omega}{2\varepsilon}.$$

Da nach § 6 für jeden Punkt dieser Kreislinie $\frac{dv}{dt} = 0$ wird, so erreicht die Geschwindigkeit v in dem betreffenden Zeitpunkt ein Maximum oder Minimum, d. h. die Geschwindigkeitsgrösse geht entweder aus dem Wachsen in das Abnehmen über, oder aus dem Abnehmen in das Wachsen. Dieser letztere Kreis kann daher der Wechselkreis genannt werden, insofern die Aenderung der Geschwindigkeitsgrösse jedes in dieser Kreislinie liegenden Punktes in dem betreffenden Augenblicke einen Wechsel des Vorzeichens erleidet. Der Gleichung des Wechselkreises kann man auch die folgende Form geben:

Fig. 57.



$$12)\quad y^2 = 2\mathfrak{R}x - x^2,$$

und dieselbe zeigt, dass der Mittelpunkt desselben in der X-Achse liegt. Die beiden Punkte, in welchen der Wendekreis und der Wechselkreis einander schneiden, sind das Geschwindigkeitscentrum und das Beschleunigungscentrum (Fig. 57).

Wenn z. B. eine kreisförmige Scheibe vom Halbmesser r mit der constanten Geschwindigkeit $c = r\omega$ auf einer horizontalen geraden Linie rollt, so ist $\varepsilon = 0$ und $u = c = r\omega$ zu setzen (Fig. 58). Aus den Gleichungen 9) und 10) des vorigen Paragraphen ergeben sich hiernach für die Coordinaten des Beschleunigungscentrums die Werthe:

$$x_0 = 0 \quad \text{und} \quad y_0 = r.$$

Das Beschleunigungscentrum fällt also in diesem Falle mir dem Mittelpunkte des rollenden Kreises zusammen. Aus den Gleichungen 7) und 11) erhält man resp. für den Halbmesser des Wendekreises und für den Halbmesser des Wechselkreises die Werthe

$$R = \tfrac{1}{2}r \quad \text{und} \quad \mathfrak{R} = \infty.$$

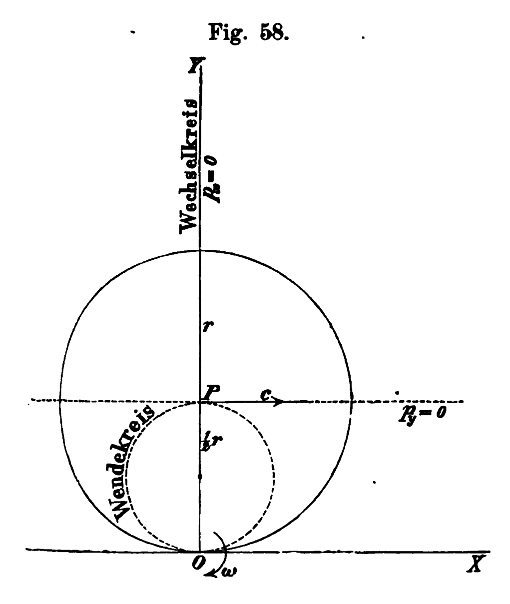


Fig. 58.

Der Wechselkreis nimmt also in diesem speciellen Falle die Form einer geraden Linie an, welche mit der Y-Achse zusammenfällt. Die gerade Linie, deren Punkte nur Vertical-Beschleunigungen besitzen, fällt ebenfalls mit der Y-Achse zusammen, während die gerade Linie, deren Punkte nur Horizontalbeschleunigungen besitzen, mit der durch den Mittelpunkt des rollenden Kreises gelegten Horizontalen zusammenfällt.

Zu analogen Resultaten führt die Anwendung der obigen Gleichungen auf die in Fig. 27 dargestellte Bewegung, wenn auch hier angenommen wird, dass der Mittelpunkt des rollenden Kreises mit der constanten Geschwindigkeit $= r\omega$ sich bewegt (Fig. 59). In Bezug auf diesen Fall erhält man resp. für den Halbmesser des Wendekreises und den Halbmesser des Wechselkreises die Werthe:

$$R = r \text{ und } \mathfrak{R} = \infty.$$

Fig. 59.

Jedoch verliert der Begriff des Wendekreises in diesem speciellen Falle seine eigentliche Bedeutung, insofern jeder Punkt der Peripherie desselben hier geradlinig sich bewegt, also eine Bahnlinie beschreibt, deren Krümmungshalbmesser beständig unendlich gross bleibt. Die Punkte A und B bewegen sich, wie in § 11 gezeigt wurde, in den Schenkeln des rechten Winkels APB und zwar mit Beschleunigungen, deren Grössen wie die Abstände AP und BP sich verhalten.

Capitel V.

Relative Bewegung.

§ 22.

Relative Bewegung des Punktes in Bezug auf einen fortschreitenden Raum.

Das gleichzeitige Vorhandensein zweier Bewegungen eines Körpers kann man so auffassen, als ob der Raum, in welchem der Körper die erste Bewegung ausführt, seinerseits gleichzeitig die zweite Bewegung ausführt. Jene erste Bewegung ist also diejenige welche der Körper wirklich ausführen würde, wenn der Raum im Ruhezustande sich befände, oder diejenige, welche einem an der Bewegung des Raumes theilnehmenden — aber von seiner Bewegung Nichts merkenden — Beobachter als die wirkliche Bewegung des Körpers erscheinen würde. Man nennt deshalb jene erste Bewegung die scheinbare oder auch die relative Bewegung des Körpers in Bezug auf den bewegten Raum. Die Bestimmung der wirklichen Bewegung des Körpers aus der gegebenen relativen Bewegung und der gleichfalls gegebenen Bewegung des Raumes ist eine Aufgabe, welche im vorigen Capitel bereits gelöst wurde. Es soll in gegenwärtigem Capitel die umgekehrte Aufgabe gelöst werden, nämlich: aus der gegebenen wirklichen Bewegung des Körpers und der gegebenen Bewegung des Raumes die relative Bewegung des Körpers in Bezug auf den Raum zu bestimmen.

Diese Aufgabe kann auf zweierlei Art gelöst werden. Man kann entweder die gegebene wirkliche Bewegung auf solche Weise in zwei Bewegungen zerlegen, dass die eine derselben übereinstimmt mit der gegebenen Bewegung des Raumes; dann wird die andere die gesuchte relative Bewegung bilden. Oder man kann auch zu der gegebenen wirklichen aus jenen zweien sich zusammensetzenden Bewegung noch eine dritte Bewegung hinzufügen, welche genau das Entgegengesetzte bildet von der Bewegung des Raumes. Durch das Hinzutreten dieser neuen Bewegung wird die Bewegung des Raumes aufgehoben, und die Resultirende dieser drei Bewegungen wird daher übereinstimmen mit derjenigen, welche beim Ruhezustande des Raumes die wirkliche Bewegung des Körpers sein würde, d. h. mit der gesuchten scheinbaren oder relativen Bewegung.

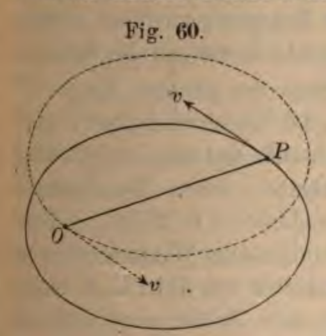
Wenn die wahre Bewegung des Körpers und die Bewegung des Raumes beide fortschreitende Bewegungen sind, so wird auch die relative Bewegung des Körpers eine fortschreitende sein.

Da bei der fortschreitenden Bewegung eines Körpers alle Punkte desselben auf gleiche Weise sich bewegen, so wird in diesem Falle die Bewegung des Körpers sowohl wie des Raumes behandelt werden dürfen wie die eines einfachen Punktes. Es handelt sich also in diesem Falle um die Bestimmung der relativen Bewegung eines Punktes in Bezug auf einen anderen Punkt. Man versteht darunter die relative Bewegung des ersten Punktes in Bezug auf einen fortschreitenden Raum, welchem der zweite Punkt angehört, oder in Bezug auf ein in fortschreitender Bewegung begriffenes Coordinaten-System, in welchem der zweite Punkt den Durchschnittspunkt der drei Achsen bildet.

Man findet die relative Geschwindigkeit des ersten Punktes, indem man zu seiner wirklichen Geschwindigkeit noch die in entgegengesetztem Sinne genommene Geschwindigkeit des zweiten Punktes hinzufügt und die Resultirende von beiden bildet. Wenn also die wirkliche Geschwindigkeit des ersten Punktes Null ist, so wird seine relative Geschwindigkeit unmittelbar dargestellt durch die in entgegengesetztem Sinne genommene Geschwindigkeit des anderen Punktes.

Wenn z. B. der eine Punkt P eine Ellipse beschreibt, in welcher der andere Punkt O die Lage eines der Brennpunkte einnimmt, so wird die Bahnlinie der relativen Bewegung des Punktes O in Bezug auf den Punkt P ebenfalls eine Ellipse sein, in welcher der Punkt P die Lage eines der Brennpunkte einnimmt (Fig. 60). Man findet diese zweite (in der Figur punktirte) Ellipse, indem man sich den Punkt O eine Bewegung ausführend denkt, welche mit der wirklichen Bewegung des Punktes P in solcher Weise correspondirt, dass die Geschwindigkeit des Punktes O stets der Geschwindigkeit v des Punktes P gleich und entgegengesetzt ist.

Fig. 60.



§ 23.

Relative Bewegung des Punktes in Bezug auf einen in beliebiger Bewegung begriffenen Raum.

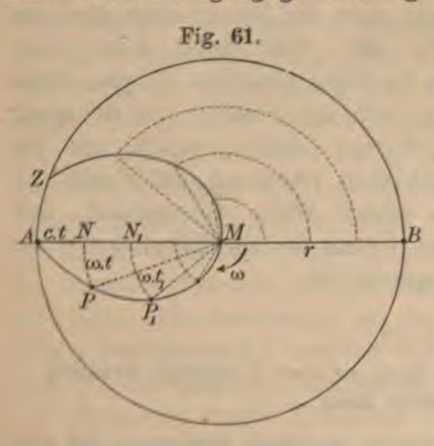
Nach § 13 kann eine beliebige gegebene Bewegung des geometrischen Körpers immer betrachtet werden als zusammengesetzt

aus einer fortschreitenden Bewegung und einer Drehbewegung; als die fortschreitende Bewegung kann dabei die Bewegung eines beliebigen Punktes des Körpers gewählt werden; die zugehörige Drehbewegung ist dann eine Drehung um diesen Punkt, d. h. um irgend eine durch diesen Punkt gehende Drehachse. Wenn man die gegebene Bewegung des Raumes, in Bezug auf welchen die relative Bewegung eines Punktes bestimmt werden soll, aus diesem Gesichtspunkte betrachtet und als fortschreitende Bewegung desselben die Bewegung derjenigen Stelle auswählt, welche der Punkt zur Zeit gerade einnimmt in dem bewegten Raume, so ergiebt sich, dass die relative Geschwindigkeit auf dieselbe Weise bestimmt werden kann, wie bei der im vorigen Paragraphen behandelten relativen Bewegung eines Punktes in Bezug auf einen anderen Punkt; denn die Drehung des Raumes um jenen Punkt kann zu der relativen Geschwindigkeit keinen Beitrag liefern.

Um die relative Geschwindigkeit des Punktes zu finden, hat man demnach zu seiner wahren Geschwindigkeit noch die Geschwindigkeit derjenigen Stelle des bewegten Raumes, welche der Punkt in dem Augenblicke gerade einnimmt, in entgegengesetztem Sinne genommen hinzuzufügen. Die Bahnlinie der relativen Bewegung findet man, indem man sich die Bahnlinie der wirklichen Bewegung einem Körper angehörend denkt, der eine Bewegung ausführt, welche das Entgegengesetzte bildet von der gegebenen Bewegung des Raumes.

Denkt man sich den Punkt z. B. längs der geraden Linie AB seine wahre Bewegung gleichförmig mit der Geschwindigkeit c ausführend, und eine kreisförmige Scheibe, deren Durchmesser die Linie AB bildet, gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit ω von links nach rechts um ihre Achse sich drehend, so hat man sich, um die relative Bewegung des Punktes in Bezug auf die Scheibe zu finden, die Linie AB von rechts nach links mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihren Mittelpunkt sich drehend zu denken, während der Punkt in ihr mit der Geschwindigkeit c vorrückt (Fig. 61). Nach Ablauf

Fig. 61.



der Zeit t wird der Punkt die Strecke $\overline{AN} = c \,.\, t$ zurückgelegt haben, und die Drehscheibe hat während dieser Zeit um den Winkel ωt von links nach rechts sich gedreht um den Mittelpunkt M. Die der Zeit t entsprechende Stelle P der relativen Bahnlinie wird daher diejenige sein, zu welcher der Punkt N gelangt, wenn die Linie AN um den Winkel $\omega \,.\, t$ von rechts nach links gedreht wird um den Drehpunkt M. Durch Wiederholuug dieser Construction für andere Werthe der Zeit t erhält man die übrigen Punkte der relativen Bahnlinie, so z. B. den Endpunkt Z, welcher der Zeit T (als ganzer Bewegungsdauer) entspricht, indem man die Stelle aufsucht, an welche der Endpunkt B der wirklichen Bahnlinie gelangt, wenn die Linie AB um den Winkel $\omega \,.\, T$ von rechts nach links gedreht wird. Wenn zufällig $\omega T = \pi$ ist, so fällt der Endpunkt Z mit dem Anfangspunkte A zusammen. Durch Verbindung der beiden Gleichungen:

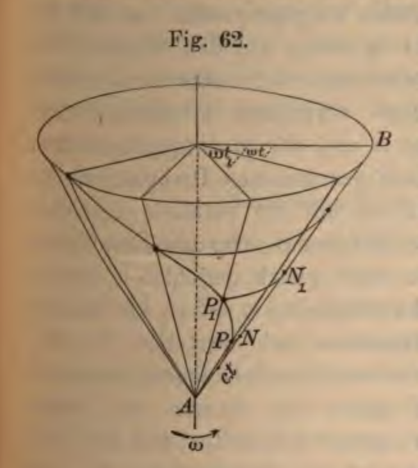
$$c T = 2 r, \quad \omega T = \pi$$

erhält man als Bedingung für dieses Zusammentreffen die Gleichung:

$$\frac{\omega}{c} = \frac{\pi}{2 r}.$$

Wenn die Bahnlinie AB der wirklichen Bewegung die Drehachse des Raumes unter einem spitzen Winkel schneidet, so liegt die relative Bahnlinie auf einer Kegelfläche (Fig. 62). Man findet den der Zeit t entsprechenden Punkt P der relativen Bahnlinie, indem man wiederum die Stelle aufsucht, an welche der Endpunkt N der wirklich zurückgelegten Strecke $AN = c \,.\, t$ gelangt, wenn die Linie AN um den Winkel ωt in einer der wirklichen Drehung des Raumes entgegengesetzten Richtung um die Drehachse gedreht wird, ebenso den der Zeit t_1 entsprechenden Punkt P_1, indem man sich die Linie $AN_1 = c \,.\, t_1$ in gleicher Weise um den Winkel ωt_1 gedreht denkt.

Fig. 62.



§ 24.

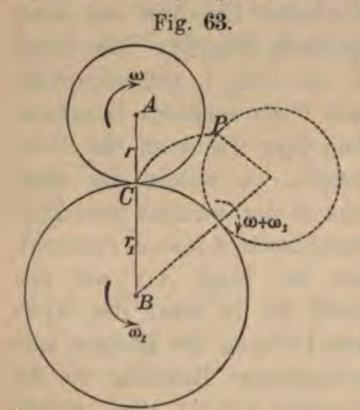
Relative Bewegung eines geometrischen Körpers in Bezug auf einen andern Körper.

Die Bewegung eines jeden der beiden Körper kann im Allgemeinen betrachtet werden als zusammengesetzt aus einer fortschreitenden Bewegung und einer Drehbewegung. Man erhält die relative Bewegung des einen Körpers A in Bezug auf einen anderen Körper B, indem man zu den beiden wirklichen Bewegungen des Körpers A noch die in entgegengesetztem Sinne genommenen beiden Bewegungen des Körpers B hinzufügt und die aus diesen vier Bewegungen resultirende Bewegung des Körpers A bestimmt.

Wenn z. B. eine Schraubenspindel in ein ruhendes Schraubenmuttergewinde hineingeschraubt wird, so ist die relative Bewegung der Schraubenmutter in Bezug auf die Schraubenspindel eine Schraubenbewegung, bei welcher sowohl die Drehbewegung als auch die fortschreitende Bewegung in entgegengesetztem Sinne erfolgt, also dieselbe, wie wenn die Schraubenmutter auf die ruhende Schraubenspindel hinaufgeschraubt würde.

Wenn jeder von den beiden Körpern eine Drehbewegung um eine feste Drehachse ausführt, so wird die relative Bewegung des einen Körpers in Bezug auf den anderen als Resultirende von zwei Drehbewegungen sich darstellen. Sind die beiden Drehachsen parallel und die beiden Drehgeschwindigkeiten entgegengesetzt, so wird die relative Bewegung des Körpers A in Bezug auf den Körper B als Resultirende sich zusammensetzen aus seiner wirklichen Drehgeschwindigkeit ω und der in entgegengesetztem Sinne genommenen Drehgeschwindigkeit ω_1 um die parallele Drehachse des Körpers B, also als Resultirende von zwei gleich gerichteten Drehgeschwindigkeiten ω und ω_1 um parallele Drehachsen sich darstellen (Fig. 63). Diese resultirende Drehgeschwindigkeit ist gleich der Summe der beiden Drehgeschwindigkeiten, und die Drehachse C der Resultirenden hat eine solche Lage, wie sie der in § 16 gefundenen Bedingungsgleichung $r\omega = r_1\omega_1$ entspricht.

Fig. 63.

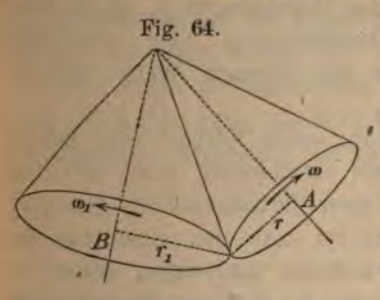


Denkt man sich die beiden rotirenden Körper als Cylinder von den Halbmessern r und r_1, so ergiebt sich, dass die relative Be-

wegung des Cylinders A in Bezug auf den Cylinder B in einem Rollen längs der Peripherie desselben besteht, welches in jedem Augenblicke als eine um die Berührungslinie als Drehachse mit der Drehgeschwindigkeit $\omega + \omega_1$ erfolgende Drehbewegung aufgefasst werden kann. Die relative Bahnlinie irgend eines Punktes P in der Peripherie des Kreises wird daher eine Epicycloide sein.

Wenn die beiden Drehachsen einander schneiden, so kann die relative Bewegung des einen Körpers in Bezug auf den anderen als Resultirende von zwei Drehgeschwindigkeiten um Achsen, die einander schneiden, nach dem Parallelogramm der Drehgeschwindigkeiten bestimmt werden. Die Drehachse der Resultirenden theilt den Winkel zwischen den beiden Achsen auf solche Weise in zwei Theile, wie es der in § 18 gefundenen Bedingung $r\omega = r_1\omega_1$ entspricht (Fig. 64). Denkt man sich die beiden Körper als Kegel mit diesen Winkeltheilen als halben Convergenzwinkeln, so ergiebt sich, dass die relative Bewegung des Kegels A in Bezug auf den Kegel B in einem Rollen längs der Mantelfläche desselben besteht. Die Bahnlinie der relativen Bewegung irgend eines Punktes der Mantelfläche des einen Kegels in Bezug auf den anderen Kegel ist in diesem Falle eine sphärische Epicycloide.

Fig. 64.

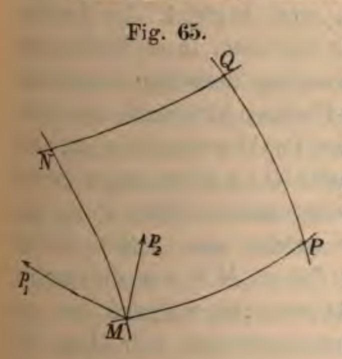


§ 25.

Beschleunigung der relativen Bewegung.

Denkt man sich einen Punkt längs der Bahnlinie MN irgend eine Bewegung ausführend und diese Bahnlinie einem Körper oder Raume angehörend, welcher seinerseits gleichzeitig eine f o r t s c h r e i t e n d e Bewegung ausführt, so kann die erstere Bewegung als relative Bewegung in Bezug auf den fortschreitenden Raum aufgefasst, und die Beschleunigung derselben die relative Beschleunigung genannt werden (Fig. 65). Ausser dieser relativen Beschleunigung p_1 hat dann der Punkt

Fig. 65.

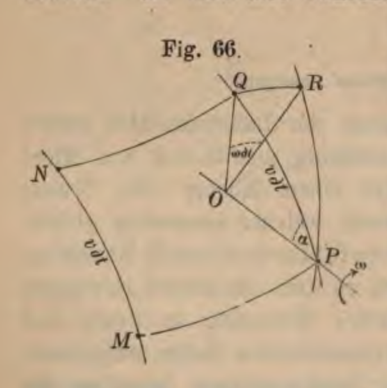


noch eine zweite Beschleunigung p_2, welche die allen Punkten des bewegten Raumes gemeinsame Beschleunigung seiner fortschreitenden Bewegung ist. Die wirkliche Beschleunigung des Punktes wird also aus den beiden Beschleunigungen p_1 und p_2 als Resultirende sich zusammensetzen.

Anders verhält es sich jedoch, wenn die Bewegung des Raumes als eine beliebig gegebene aus einer fortschreitenden und einer Dreh-Bewegung zusammengesetzt betrachtet werden muss. In diesem Falle kommt zu den beiden Beschleunigungen p_1, p_2 in Folge der gleichzeitig stattfindenden Drehbewegung noch eine dritte Beschleunigung p_3 hinzu, welche auf folgende Weise bestimmt werden kann.

Die beliebig gegebene Bewegung eines Körpers oder Raumes kann nach § 13 auf unendlich viele verschiedene Arten betrachtet werden als zusammengesetzt aus einer fortschreitenden Bewegung und einer Drehbewegung, je nachdem man den einen oder den anderen Punkt des Körpers auswählt als denjenigen, dessen Bewegung die fortschreitende Bewegung des Körpers darstellen soll. Wählt man im vorliegenden Falle diejenige Stelle des bewegten Raumes, welche der Punkt zur Zeit in demselben einnimmt, oder diejenige Stelle der relativen Bahnlinie, durch welche der Punkt in dem Augenblicke gerade hindurchgeht, so wird die zugehörige Drehbewegung eine mit irgend welcher Drehgeschwindigkeit ω erfolgende Drehung um eine durch diese Stelle hindurchgelegte Achse sein müssen. Es wird also während des auf jenen Zeitpunkt folgenden unendlich kleinen Zeittheilchens dt der bewegte Punkt aus der Drehachse — in welcher er zu Anfang desselben noch sich befand — heraustreten, und zugleich die Drehbewegung beginnen, ihren Einfluss auf die Bewegung desselben auszuüben. Dieser Einfluss wird darin bestehen, dass der Punkt nunmehr nicht nach der Stelle Q, sondern statt dessen nach einer andern Stelle R hin gelangt, welche man findet, indem man sich das relative Bahn-Element $PQ = MN$ um die augenblickliche Drehachse PO gedreht denkt um den während der unendlich kleinen Zeit zurückgelegten Drehungswinkel $\omega\,dt$ (Fig. 66).

Fig. 66.



Der Bogen $\widehat{QR}$ repräsentirt also eine in Folge des Heraustretens aus der augenblicklichen Drehachse zu den bereits vorhandenen hinzukommende neue Bewegung, welche als eine während der Zeit dt allmählich entstehende Bewegung aufgefasst werden muss. Da die Dauer derselben unendlich klein ist, so darf das Wachsen der neu entstehenden Geschwindigkeit als ein gleichförmiges betrachtet, folglich die zurückgelegte Wegeslänge wie bei einer gleichförmig bebschleunigten Bewegung berechnet werden (vergl. § 7). Es hat also die Drehung um die augenblickliche Drehachse genau denselben Einfluss, wie wenn ausser den zwei Beschleunigungen p_1 und p_2 noch eine dritte Beschleunigung p_3 stattfände, welche, wenn sie allein vorhanden wäre, die Zurücklegung der Strecke $\widehat{QR}$ bedingen würde, also zu bestimmen ist aus der Gleichung:

$$\widehat{QR} = p_3 \frac{dt^2}{2}.$$

Wenn mit v die relative Geschwindigkeit und mit α der Winkel bezeichnet wird, welchen das relative Bahn-Element mit der augenblicklichen Drehachse einschliesst, so ist der zu dem Bogen $\widehat{QR}$ gehörige Halbmesser:

$$\widehat{OQ} = v\,dt \,.\, \sin \alpha.$$

Man erhält also, indem man den Bogen durch den Halbmesser und den zugehörigen Winkel ausdrückt, den Werth:

$$\widehat{QR} = v\,dt \sin \alpha \,.\, \omega\,dt.$$

Aus der Gleichsetzung der für den Bogen $\widehat{QR}$ gefundenen beiden Ausdrücke ergiebt sich für die gesuchte Beschleunigung p_3 der Werth:

$$p_3 = 2 v \omega \sin \alpha.$$

Die wirkliche Beschleunigung des Punktes setzt sich also als Resultirende aus folgenden drei Beschleunigungen zusammen:

Die erste p_1 ist die Beschleunigung der relativen Bewegung.

Die zweite p_2 ist die Beschleunigung der Stelle des bewegten Raumes, welche der bewegte Punkt in demselben zur Zeit einnimmt.

Die dritte p_3 ist ihrer Grösse nach gleich dem doppelten Produkte aus der relativen Geschwindigkeit, der Drehgeschwindigkeit des Raumes um die durch den Punkt gelegte augenblickliche Drehachse und dem Sinus des Winkels, welchen das relative Bahn-

Element mit der augenblicklichen Drehachse einschliesst; ihre Richtung steht rechtwinkelig zu der Ebene, welche das relative Bahn-Element und die augenblickliche Drehachse zusammen enthält, und entspricht zugleich dem Sinne, in welchem die Drehbewegung stattfindet.

Wenn die Aufgabe in der umgekehrten Form gestellt ist: nämlich aus der gegebenen wirklichen Bewegung des Punktes und der gleichfalls gegebenen Bewegung des Raumes, die relative Beschleunigung p_1 zu bestimmen, so findet man den zur Lösung dieser Aufgabe einzuschlagenden Weg, indem man sich die Beziehungen, welche zwischen den vier Beschleunigungen stattfinden, durch die drei Figuren **67**, **68**, **69** in folgender Weise veranschaulicht. In Fig. **67** ist jede von den 4 Beschleunigungen in ihrer wahren Richtung dargestellt, nämlich die wirkliche Beschleunigung p als Resultirende der drei Beschleunigungen p_1, p_2, p_3. Wenn man die Richtung der wirklichen Beschleunigung in die entgegengesetzte verwandelt, so erhält man Fig. **68**. Die in dieser Figur dargestellten 4 Beschleunigungen würden also einander gegenseitig aufheben. Da die Beschleunigung p_1 durch die drei anderen Beschleunigungen, wie sie in dieser Figur dargestellt sind, aufgehoben werden würde, so muss sie, wenn diese drei Beschleunigungen in die entgegengesetzten verwandelt werden, ihre Resultirende bilden. Kehrt man in dieser Figur die drei Beschleunigungen p, p_2, p_3 um, so erhält man Fig. **69**, in welcher die Beschleunigung p_1 als Resultirende der drei anderen Beschleunigungen dargestellt ist. Wenn man die in dieser Figur angegebenen Beschleunigungen vergleicht mit den in Fig. **67** ursprünglich gegebenen Beschleunigungen, so erkennt man, dass die gesuchte relative Beschleunigung p_1 die Resultirende bildet von der wirklichen Beschleunigung p und den in entgegengesetzten Richtungen genommenen zwei Beschleunigungen p_2 und p_3.

Fig. 67.

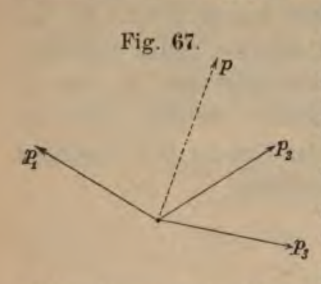
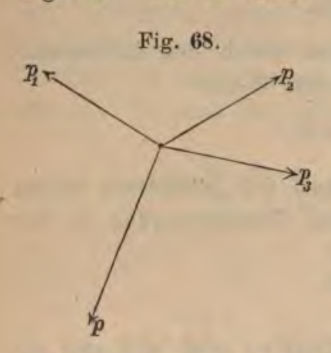
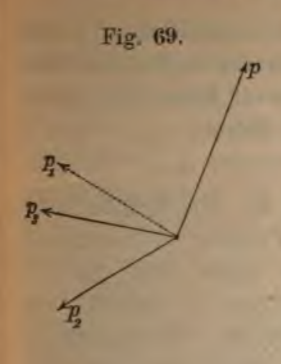


Fig. 68.



Da ein an der Bewegung des Raumes theilnehmender Beobachter, welcher von seiner eigenen Bewegung Nichts wüsste,


Fig. 69.

die relative Beschleunigung p_1 als die wirkliche ansehen müsste, so würde demselben die Bewegung des Punktes so erscheinen, als ob ausser der wirklichen Beschleunigung p noch die zwei in entgegengesetztem Sinne genommenen Beschleunigungen p_2 und p_3 vorhanden wären, weshalb man diese letzteren auch wohl die beiden scheinbaren Beschleunigungen nennt.

§ 26.

Anwendung der Theorie der relativen Beschleunigung.

Die wirkliche Beschleunigung eines Punktes, welcher mit der Geschwindigkeit v längs des Durchmessers einer kreisförmigen Scheibe sich bewegt, während dieselbe mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig um ihre Achse sich dreht, setzt sich aus folgenden drei Beschleunigungen zusammen. Die erste ist die Beschleunigung der relativen Bewegung:

$$p_1 = \frac{dv}{dt}.$$

Die zweite ist die Beschleunigung p_2, mit welcher die von dem bewegten Punkte zur Zeit eingenommene Stelle M der Scheibe sich bewegt (Fig. 70). Da diese Stelle M gleichförmig mit der Geschwindigkeit $x\omega$ längs der Peripherie des Kreises vom Halbmesser $OM = x$ sich bewegt, so ist ihre Beschleunigung als Centripetal-Beschleunigung der gleichförmigen Kreisbewegung nach dem Mittelpunkte des Kreises gerichtet und hat (nach § 6) die Grösse

$$p_2 = x\omega^2.$$

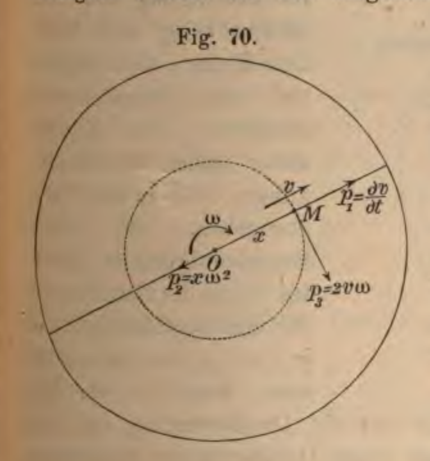


Fig. 70.

Die dritte Beschleunigung ist rechtwinkelig zu der Ebene, welche durch das relative Bahn-Element und die (der Scheibenachse parallele) augenblickliche Drehache bestimmt ist, folglich ist

dieselbe tangential zu der von der Stelle M beschriebenen Kreislinie gerichtet, und da der Winkel α zwischen der augenblicklichen Drehachse und der relativen Bahnlinie in diesem Falle ein rechter Winkel ist, so hat diese Beschleunigung die Grösse:

$$p_3 = 2\,v\,\omega.$$

Um die totale Beschleunigung eines an der Erdoberfläche längs des Meridiankreises sich bewegenden Punktes zu bestimmen für den Zeitpunkt, in welchem derselbe an einem Orte von der geographischen Breite φ mit der Geschwindigkeit v eintrifft, hat man zunächst bei der Bestimmung der relativen Beschleunigung p_1 zu berücksichtigen, dass die relative Bewegung hier eine krummlinige ist, und dass nicht nur die Grössen-Aenderung, sondern auch die Richtungs-Aenderung der Geschwindigkeit das Vorhandensein einer Beschleunigung bedingt. Es setzt sich also die relative Beschleunigung zusammen aus der Tangential-Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ und der Centripetal-Beschleunigung $\frac{v^2}{r}$ der relativen Bewegung (Fig. 71). Die zweite Beschleunigung p_2 ist als Centripetal-Beschleunigung der Stelle M der Erdoberfläche nach dem Mittelpunkte des Parallelkreises gerichtet, und die dritte Beschleunigung p_3 ist rechtwinkelig zur Meridian-Ebene, also tangential zum Parallelkreise gerichtet. Die Grössen dieser beiden Beschleunigungen sind in der Figur angegeben. Als totale Beschleunigung des Punktes würde die Resultirende der drei Beschleunigungen p_1, p_2, p_3 zu betrachten sein, wenn — wie hier vorausgesetzt wurde — die Erde nur die Drehbewegung um ihre Achse ausführte. Sollte die neben dieser Drehbewegung vorhandene fortschreitende Bewegung derselben mit berücksichtigt werden, so müsste zu der Beschleunigung p_2 noch die nach dem Sonnenmittel-

Fig. 71.

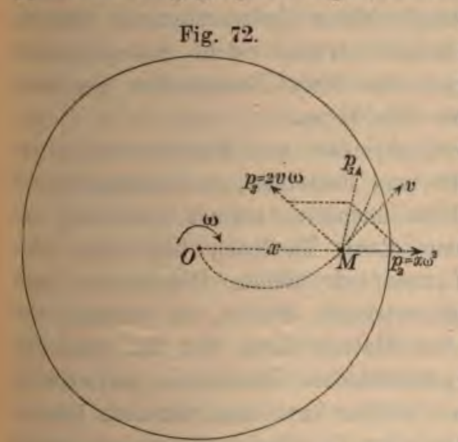


punkte gerichtete Centripetal-Beschleunigung der gleichförmigen Kreisbewegung hinzugesetzt werden, welche der Erdmittelpunkt in Bezug auf den Sonnenmittelpunkt ausführt.

Wäre in einem der beiden vorigen Fälle die wirkliche Beschleunigung p gegeben gewesen, so würde man, um die relative Beschleunigung p_1 zu bestimmen, die Beschleunigungen p_2 und p_3 in entgegengesetztem Sinne genommen mit der Beschleunigung p zu einer Resultirenden zusammenzusetzen haben.

Wenn z. B. die wirkliche Bewegung des Punktes als eine geradlinige und gleichförmige Bewegung gegeben ist — wie bei dem in Fig. 71 behandelten Falle, für welchen in § 23 die relative Bahnlinie bestimmt wurde — und die relative Beschleunigung gesucht wird in Bezug auf die mit der Winkelgeschwindigkeit ω gleichförmig um ihre Achse rotirende kreisförmige Scheibe, deren Durchmesser die wirkliche Bahnlinie bildet, so hat man zu der wirklichen Beschleunigung p — welche in diesem Falle Null ist, da die wirkliche Bewegung geradlinig und gleichförmig ist — die folgenden zwei Beschleunigungen hinzuzufügen (Fig. 72). Die eine p_2 ist die entgegengesetzt genommene Centripetal-Beschleunigung des Ortes M auf der Scheibe, an welchem der Punkt augenblicklich sich befindet. Die andere p_3 ist rechtwinkelig zu der — nach den in § 23 gefundenen Regeln zu construirenden — relativen Bahnlinie gerichtet, und zwar dem Sinne der Drehbewegung entgegengesetzt. Die relative Beschleunigung p_1 wird also durch die Diagonale des aus den beiden in der Figur angegebenen Beschleunigungen p_2 und p_3 gebildeten Parallelogramms dargestellt.

Fig. 72.



ZWEITER ABSCHNITT.

Mechanik des materiellen Punktes.

Capitel VI.

Grundbegriffe und Grundgesetze der Mechanik.

§ 27.

Begriff des materiellen Punktes.

Die Untersuchungen des vorigen Abschnitts bezogen sich lediglich auf die Bewegungen geometrischer Gebilde. Den Gegenstand der eigentlichen Mechanik bilden Untersuchungen über die Bewegungen der physikalischen Körper, welche man betrachten kann als geometrische Körper, in deren Raumtheilen bestimmte Quantitäten von Materie ihren Sitz haben.

Um die Bewegung eines physikalischen Körpers vollkommen genau zu bestimmen, müsste man denselben als zusammengesetzt betrachten aus unendlich vielen unendlich kleinen Theilchen, und die Bewegung jedes einzelnen dieser Theilchen bestimmen. Ein solches Körpertheilchen von unendlich kleinen Dimensionen kann behandelt werden wie ein geometrischer Punkt, in welchem eine unendlich kleine Quantität von Materie ihren Sitz hat, und wird zum Unterschiede von dem geometrischen Punkte ein materieller Punkt genannt. Den ganzen Körper kann man demnach betrachten als ein System von materiellen Punkten, welche man sich je nach der Beschaffenheit des Körpers auf die eine oder andere Art mit einander verbunden zu denken hat. Die Bewegung eines solchen Systems von materiellen Punkten ist als bekannt zu betrachten, sobald die Bewegung jedes einzelnen der zu demselben gehörigen materiellen Punkte bekannt ist.

Die Bewegung eines Systems von materiellen Punkten kann man sich in jedem Augenblicke zusammengesetzt denken aus einer

fortschreitenden Bewegung, einer Drehbewegung und einer gleichzeitig stattfindenden Verschiebung der einzelnen materiellen Punkte gegen einander. Die Bestimmung der Bewegung desselben ist daher eine Aufgabe, welche in drei einzelne Aufgaben zerlegt werden kann, und jede der drei Bewegungen kann zum Gegenstande einer besonderen Untersuchung gemacht werden. Es liegt in der Natur der Sache, dass es bei einer solchen Special-Untersuchung zulässig ist, die zwei anderen Bewegungsarten zeitweilig ausser Acht zu lassen, indem man sich die Berücksichtigung derselben — falls dies als erforderlich sich herausstellt — für eine spätere Zeit vorbehält.

Es kommen in der Mechanik häufig Aufgaben vor, bei deren Lösung es nicht erforderlich ist, auf die Verschiebung der einzelnen Theilchen des Körpers gegen einander Rücksicht zu nehmen. In solchen Fällen darf man den Körper behandeln, wie wenn die Form desselben unveränderlich wäre, oder wie wenn derselbe ein System von materiellen Punkten bildete, in welchem je zwei materielle Punkte durch eine gerade Linie von unveränderlicher Länge verbunden sind. Die Bewegung eines solchen unveränderlichen Systems ist dann wie die eines geometrischen Körpers als zusammengesetzt zu betrachten lediglich aus einer fortschreitenden Bewegung und einer Drehbewegung. Die fortschreitende Bewegung eines geometrischen Körpers kann — wie im vorigen Abschnitte gezeigt wurde — auf dieselbe Weise behandelt werden wie die Bewegung des geometrischen Punktes. Wenn also die Natur der gestellten Aufgabe ausschliesslich die Berücksichtigung der fortschreitenden Bewegung des Körpers erfordert, so ist es zulässig, denselben wie einen einfachen materiellen Punkt zu behandeln, in welchen man sich alsdann die ganze Materie des Körpers concentrirt zu denken hat. Es ist daher, wenn von einem materiellen Punkte die Rede ist, nicht immer erforderlich, denselben als Sitz einer unendlich kleinen Quantität von Materie zu betrachten, sondern unter Umständen ist es zulässig, dieselbe so gross, wie die eines beliebig gegebenen Körpers sich zu denken.

§ 28.

Massen und Kräfte.

Die Quantität der Materie, welche ein Körper enthält, nennt man die Masse desselben. Die Masse des ganzen Körpers setzt sich zusammen aus den Massen der einzelnen materiellen Punkte,

aus welchen derselbe besteht. Um zu zeigen, auf welche Weise die Massen als Grössen definirt und gemessen werden können: dazu ist es erforderlich, vorher den Begriff der Kraft festzustellen. Die Massen können nur mit Hülfe von Kräften gemessen werden.

Unter Kraft versteht man die Ursache der Geschwindigkeitsänderung eines materiellen Punktes. Als Richtung der Kraft sieht man die Richtung der von derselben hervorgebrachten Beschleunigung an, und die Grösse der Kraft beurtheilt man nach der Grösse der hervorgebrachten Beschleunigung. Man nennt die Kraft constant, wenn die von derselben hervorgebrachte Beschleunigung der Grösse und Richtung nach unveränderlich ist. Im Folgenden sind, wenn von Kräften die Rede ist, darunter vorläufig immer constante Kräfte zu verstehen, sobald nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird. Zwei Kräfte sind gleich gross, wenn sie einem und demselben materiellen Punkte gleich grosse Beschleunigungen ertheilen. Wenn dagegen die von der einen Kraft hervorgebrachte Beschleunigung K-mal so gross ist als die Beschleunigung, welche demselben materiellen Punkte von einer zweiten Kraft ertheilt wird, so nennt man die erstere K-mal so gross als die zweite.

Die Massen zweier materieller Punkte sind gleich gross, wenn gleiche Kräfte ihnen gleiche Beschleunigungen ertheilen. Um jedoch die Gleichheit zweier Kräfte zu constatiren, von denen die eine auf den ersten und die andere auf einen zweiten materiellen Punkt wirkt: dazu reichen die oben gegebenen Definitionen des Kraftbegriffs noch nicht aus. Es muss hier vielmehr vorausgesetzt werden, dass es erfahrungsmässig noch ein anderes Kriterium giebt, um die Gleichheit zweier Kräfte zu erkennen. Annäherungsweise besitzen wir ein solches Kriterium in dem Gefühle der Anstrengung, welches wir empfinden, wenn wir mittelst unserer eigenen Körperkraft die Beschleunigung hervorbringen. Genauer lässt sich die Gleichheit von zwei auf verschiedene Körper wirkenden Kräften constatiren, wenn man sich, um die Kraft auf den Körper zu übertragen, der Vermittelung eines elastischen Fadens (oder einer elastischen Stange oder eines Dynamometers) bedient, in welchem Falle wir die Voraussetzung machen, dass gleichen Grössen der übertragenen Kräfte gleiche Verlängerungszustände des Fadens (oder der Stange) entsprechen. Es zeigt sich nämlich erfahrungsmässig, dass diese Voraussetzung in Ueberein-

stimmung steht mit der oben gegebenen Definition, nach welcher bei continuirlich beschleunigter Bewegung die anfangs bei geringerer Geschwindigkeit wirkende Kraftgrösse und die später bei eingetretener grösserer Geschwindigkeit wirkende Kraftgrösse als einander gleich betrachtet werden sollen, sobald die Beschleunigung stets dieselbe bleibt.

Wenn auf solche Weise die Möglichkeit gegeben ist, die Gleichheit der Massen zweier materieller Punkte an der Gleichheit der von gleichen Kräften ihnen ertheilten Beschleunigungen zu erkennen, so ist damit zugleich das Mittel gegeben, die Massengrössen zu messen und durch Zahlen auszudrücken. Durch Vereinigung zweier materieller Punkte von gleichen Massen erhält man einen materiellen Punkt, dessen Masse doppelt so gross, und durch Vereinigung von m solchen Punkten erhält man einen materiellen Punkt, dessen Masse m-mal so gross ist als die jedes einzelnen. Wenn also die Masse irgend eines bestimmten materiellen Punktes als Masseneinheit gewählt ist, so wird mit der Zahl m die Grösse derjenigen Masse zu bezeichnen sein, welche sich zerlegen lässt in m einzelne Massen, deren jede gleich der Masseneinheit ist.

§ 29.

Grundgesetze der Mechanik.

Als Krafteinheit soll diejenige Kraft gewählt werden, welche der Masseneinheit eine Beschleunigung gleich der Längeneinheit ertheilt.

Nach der im Anfange des vorigen Paragraphen gegebenen Definition der Kraftgrösse würde man nunmehr diejenige Kraft durch die Zahl K auszudrücken haben, welche der Masseneinheit eine Beschleunigung von K Längeneinheiten ertheilt. Wenn man diese Kraft K ein anderes Mal auf eine Masse von der Grösse m wirken lässt, so beträgt — wie die Erfahrung lehrt — die hervorgebrachte Beschleunigung nur den m-ten Theil von der vorigen, hat also die Grösse:

$$p = \frac{K}{m},$$

d. h. es ist die Beschleunigung gerade so zu bestimmen, wie wenn die Kraft K aus m gleichen Theilen bestände, deren jeder auf eine der m Masseneinheiten wirkend derselben die Beschleunigung $\frac{K}{m}$ ertheilt.

Dieses Gesetz ist, insofern dasselbe sich keineswegs aus den im vorigen Paragraphen gegebenen Definitionen ableiten und beweisen lässt, als ein Erfahrungsgesetz oder Grundgesetz zu betrachten und wird das Gesetz der Beschleunigung genannt. Dasselbe lautet in Worten ausgedrückt:

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}.$$

Setzt man in der obigen Gleichung $K = 0$, so erhält man die Beschleunigung $p = 0$, d. h. wenn keine Kraft wirkte, so würde die Bewegung eine geradlinige gleichförmige sein. Diese Eigenschaft des materiellen Punktes wird die Trägheit genannt. Das Gesetz der Trägheit ist also in dem allgemeineren Gesetze der Beschleunigung als ein specieller Fall enthalten.

Das zweite Grundgesetz der Mechanik ist das Gesetz der Unabhängigkeit der Bewegungen: Wenn gleichzeitig mehrere Bewegungsursachen vorhanden sind, so führt der materielle Punkt die Resultirende aller derjenigen Bewegungen aus, welche diese Bewegungsursachen einzeln genommen bedingen würden.

Es sind hierbei zwei Arten von Bewegungsursachen zu unterscheiden. Die schon vorhandene Geschwindigkeit eines materiellen Punktes ist als Ursache einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung zu betrachten, insofern der materielle Punkt nach dem Gesetze der Trägheit diese Geschwindigkeit unverändert beibehalten würde, wenn sonst keine Bewegungsursachen vorhanden wären. Die Kräfte als Ursachen von Beschleunigungen bilden die zweite Art von Bewegungsursachen.

Als specielle Folgerung aus diesem allgemeineren Gesetze ergiebt sich einerseits der schon im vorigen Paragraphen erwähnte Satz, nach welchem die Beschleunigung, welche eine Kraft einem materiellen Punkte ertheilt, unabhängig ist von der Geschwindigkeit, welche derselbe schon besitzt. Andererseits ergiebt sich aus dem genannten Grundsatze der Satz, welchen man das Parallelogramm der Kräfte nennt, nach welchem die Resultirende oder Mittelkraft von zwei Kräften genau auf dieselbe Weise zu bestimmen ist, wie in § 4 die Resultirende von zwei Geschwindigkeiten und in § 5 die Resultirende von zwei Beschleunigungen gefunden wurde. Die weitere Verfolgung dieses Weges führt auf analoge Weise wie dort zu dem Satze, welchen man das Parallelepipedon der Kräfte, und zu dem Satze, welchen man das Polygon der Kräfte nennt.

Das dritte allgemeine Grundgesetz der Mechanik ist das Gesetz der Wechselwirkung. Die Kräfte treten nie einzeln, sondern stets nur paarweise in der Natur auf, und zwar in solcher Weise, dass die zwei zu dem Paare gehörigen Kräfte in einer und derselben geraden Linie wirkend stets gleiche Grössen und

entgegengesetzte Richtungen haben. Wenn auf einen materiellen Punkt irgend eine Kraft wirkt, so giebt es in der Richtung dieser Kraft stets einen zweiten materiellen Punkt, welcher als Ausgangspunkt dieser Kraft zu betrachten ist und welcher dabei eine genau ebenso grosse Gegenwirkung erleidet, als deren Ausgangspunkt wiederum der erste materielle Punkt zu betrachten ist.

Capitel VII.

Geradlinige Bewegung des materiellen Punktes.

§ 30.

Wirkung der Schwerkraft.

Die Erfahrung lehrt, dass jeder Körper von der Erde angezogen wird mit einer Kraft, als deren Ausgangspunkt der Mittelpunkt der Erde zu betrachten ist. Man nennt diese Kraft, wenn im Allgemeinen von derselben die Rede ist, die Schwerkraft, und wenn von der speciellen Grösse derselben für einen bestimmten Körper die Rede ist, das Gewicht des Körpers. Die Beschleunigung, welche diese Kraft dem Körper ertheilt, ist — wie die Erfahrung lehrt — unabhängig von der Masse des Körpers und hat für alle an der Erdoberfläche befindlichen Körper die gemeinschaftliche Grösse:

$$g = 9^{m}, 8 \ldots,$$

welche die Beschleunigung der Schwerkraft oder Beschleunigung des freien Falles genannt wird und stets mit dem Buchstaben „g“ bezeichnet werden soll. Der angegebene numerische Werth 9,8 entspricht der Voraussetzung: dass die Secunde als Zeiteinheit und die Länge eines Meters als Längeneinheit gewählt ist.

Nach dem Gesetze der Beschleunigung ist die Kraft gleich dem Produkte aus der Masse in die Beschleunigung, welche sie derselben ertheilt. Wenn also mit Q_1 das Gewicht der Masse m_1 und mit Q_2 das Gewicht der Masse m_2 bezeichnet wird, so ist:

$$Q_1 = m_1 g \text{ und } Q_2 = m_2 g, \text{ folglich: } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Die letztere Gleichung zeigt, dass die Massen zweier Körper sich verhalten wie ihre Gewichte, dass also das Massenverhältniss zweier Körper auch durch Wägung derselben ermittelt werden kann.

Wählt man als Masseneinheit diejenige Masse, welche 1 Kilogramm wiegt, und als Längeneinheit die Länge eines Meters, so wird als Krafteinheit diejenige Kraft zu betrachten sein, welche einem Kilogramm Masse eine Beschleunigung von einem Meter ertheilen würde. Wenn man dagegen als Krafteinheit das Gewicht von einem Kilogramm Masse wählt und als Einheit der Beschleunigungsgrösse die Länge eines Meters beibehalten will, so wird nunmehr als Masseneinheit die Masse von g Kilogrammen zu betrachten sein.

Die Bewegung, welche ein materieller Punkt unter Einwirkung der Schwerkraft ausführt, wird eine geradlinige sein, wenn die Anfangsgeschwindigkeit desselben eine vertikale Richtung hatte. Die Beschleunigung dieser geradlinigen Bewegung ist vertical abwärts gerichtet und hat die constante Grösse g. Es können daher die am Schlusse des § 2 für die gleichförmig beschleunigte Bewegung gefundenen Gleichungen unmittelbar auf den vorliegenden Fall angewendet werden, sobald darin die Grösse p mit der Grösse g vertauscht wird. Wenn mit s die nach Ablauf von t Secunden zurückgelegte Wegeslänge, mit v die Geschwindigkeit in diesem Zeitpunkte und mit v_0 die vertical abwärts gerichtete Anfangsgeschwindigkeit bezeichnet wird, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = g$$

$$\frac{ds}{dt} = v = v_0 + g\,t,$$

$$s = v_0 t + \frac{g\,t^2}{2},$$

aus welchen für jeden gegebenen Werth von t die zugehörigen Werthe von s und v berechnet werden können. Aus den letzteren beiden Gleichungen erhält man durch Elimination der Zeit t die Gleichung:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,s},$$

welche die Geschwindigkeit v als Function der zurückgelegten Wegeslänge darstellt.

§ 31.

Freier Fall aus grosser Höhe.

Nach dem Newton'schen Gravitationgesetze wirken je zwei materielle Punkte auf einander mit einer Anziehungskraft, welche

dem Produkte ihrer beiden Massen und dem umgekehrten Quadrate ihres Abstandes proportional ist. Wenn also k die Anziehungskraft ist, mit welcher die Masse Eins auf die Masse Eins beim Abstande Eins wirkt, so ist die Kraft K, mit welcher ein materieller Punkt von der Masse m_1 auf einen zweiten materiellen Punkt von der Masse m_2 beim Abstande ρ wirkt, zu bestimmen aus der Gleichung:

$$1)\quad K = k\frac{m_1 \cdot m_2}{\rho^2}.$$

Wenn man dieses Gesetz auf den speciellen Fall anwendet, in welchem die eine von den beiden einander anziehenden Massen die Erdmasse E ist, und dabei einstweilen die (später näher zu begründende) Voraussetzung macht, dass es zulässig ist, die Erdmasse als im Mittelpunkte der Erdkugel concentrirt anzusehen, so erhält man für das Gewicht eines materiellen Punktes von der Masse m, dessen Abstand vom Erdmittelpunkte gleich dem Erdhalbmesser r ist, die Gleichung:

$$2)\quad mg = k\,.\,\frac{m\,.\,E}{r^2}.$$

Denkt man sich denselben materiellen Punkt ein anderes Mal in dem grösseren Abstande a vom Erdmittelpunkte, so erhält man für die kleinere Beschleunigung p, welche die Anziehungskraft der Erde demselben an dieser Stelle ertheilen würde, die Gleichung:

$$3)\quad mp = k\frac{m\,.\,E}{a^2}.$$

Für das Verhältniss der beiden Fallbeschleunigungen ergiebt sich hieraus der Werth:

$$4)\quad \frac{p}{g} = \frac{r^2}{a^2}.$$

Wenn der materielle Punkt an der Stelle A im Abstande a vom Erdmittelpunkte E seine Bewegung mit der Geschwindigkeit Null beginnt (Fig. 73), so wird seine Beschleunigung im ersten Augenblicke die Grösse $p = \frac{gr^2}{a^2}$ haben. Später, nachdem derselbe die Strecke x zurückgelegt hat, geschieht die Bewegung mit der dem nunmehrigen Abstande $a-x$ entsprechenden Beschleunigung:

Fig. 73.

$$5)\quad \frac{dv}{dt} = \frac{gr^2}{(a-x)^2}.$$

Diese Gleichung nimmt, wenn auf beiden Seiten mit $2\,dx$ multiplicirt, und $\frac{dx}{dt} = v$ gesetzt wird, die Form an:

$$6)\quad 2\,v\,dv = \frac{2\,g\,r^2\,dx}{(a-x)^2},$$

und durch Integration erhält man die folgende Gleichung:

$$7)\ \int_0^v 2\,v\,dv = 2\,g\,r^2 \int_0^x \frac{dx}{(a-x)^2} \quad \text{oder:} \quad v^2 = 2\,g\,r^2\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}\right).$$

Setzt man hierin $x = a - r$ und $v = V$, so erhält man für die Geschwindigkeit, mit welcher der fallende Körper die Erdoberfläche erreicht, den Werth:

$$8)\quad V = \sqrt{\frac{2\,g\,r\,(a-r)}{a}}.$$

Je grösser der ursprüngliche Abstand a im Verhältniss zum Erdhalbmesser ist, um so mehr nähert sich der Quotient $\frac{a-r}{a}$ dem Grenzwerthe Eins. Man erhält also für die Endgeschwindigkeit eines aus unendlich grosser Höhe auf die Erdoberfläche herabfallenden Körpers den Werth:

$$9)\quad V = \sqrt{2\,g\,r}.$$

Hierin ist $r = 6370000^{\mathrm{m}}$ und $g = 9^{\mathrm{m}},8\ldots$ zu setzen, folglich ist:
$V = 11180^{\mathrm{m}} = 1{,}507$ geogr. Meilen.

Für die Endgeschwindigkeit V_1, mit welcher an der Oberfläche eines anderen kugelförmigen Weltkörpers ein aus unendlich grosser Höhe herabfallenden Körper ankommen würde, ergiebt sich, wenn mit r_1 der Halbmesser dieses Weltkörpers und mit g_1 die Fallbeschleunigung an der Oberfläche desselben bezeichnet wird, die Gleichung:

$$10)\quad V_1 = \sqrt{2\,g_1\,r_1},$$

in welcher die Grösse g_1 nach dem Gravitationsgesetze zu berechnen ist.

Wenn mit S die Sonnenmasse und mit r_1 der Sonnenhalbmesser bezeichnet wird, so ergiebt sich für das Gewicht, welches die Masse m an der Sonnenoberfläche haben würde, der Werth:

$$m g_1 = k \cdot \frac{m S}{r_1^2},$$

und wenn man diesen Werth dividirt durch den oben für mg gefundenen Werth, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{g_1}{g} = \frac{S}{E} \cdot \frac{r^2}{r_1^2}.$$

Für das Verhältniss der beiden Endgeschwindigkeiten V_1 und V ergiebt sich hiernach der Werth:

$$11) \quad \frac{V_1}{V} = \frac{\sqrt{2 g_1 r_1}}{\sqrt{2 g r}} = \sqrt{\frac{S}{E}} \cdot \sqrt{\frac{r}{r_1}}.$$

Setzt man hierin das Massenverhältniss $\frac{S}{E} = 320000$ und das Halbmesser-Verhältniss $\frac{r}{r_1} = \frac{1}{108}$, so wird $\frac{g_1}{g} = 27{,}4$ und $\frac{V_1}{V} = 54{,}43$. Es würde also ein aus unendlich grosser Entfernung auf die Sonne herabfallender Körper die Oberfläche derselben mit der Geschwindigkeit $V_1 = 1{,}507 \,.\, 54{,}43 = 82{,}0$ geogr. Meilen pro Secunde erreichen.

Der Halbmesser der Erdbahn ist etwa 215-mal so gross als der Sonnenhalbmesser. Setzt man $215 \,.\, r_1$ statt r_1 und $\frac{g_1}{215^2}$ statt g_1 in obiger Gleichung, so erhält man $V_1 = 5{,}6$ geogr. Meilen als diejenige Geschwindigkeit, welche der aus unendlicher Ferne auf die Sonne herabfallende Körper besass in dem Augenblicke, wo sein Abstand von der Sonne noch so gross wie der Abstand der Erde von der Sonne, nämlich gleich 20 Millionen Meilen war.

Man kann der ursprünglich für V gefundenen Gleichung, indem man die Fallhöhe $a - r = h$ setzt, auch die Form geben:

$$V = \sqrt{\frac{2grh}{r+h}} = \sqrt{2gh} \,.\, \left(1 + \frac{h}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Der letzte Factor auf der rechten Seite ist die Zahl, mit welcher man die Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$, welche bei constanter Fallbeschleunigung g als Endgeschwindigkeit sich ergeben würde, zu multipliciren hat, um den genaueren Werth zu erhalten. Wenn das Verhältniss $\frac{h}{r}$ klein ist, so kann man in der Reihe:

$$\left(1 + \frac{h}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{h}{r} + \frac{3}{8}\left(\frac{h}{r}\right)^2 - \cdots$$

die höheren Potenzen von $\frac{h}{r}$ vernachlässigen und die Geschwindigkeit V hinreichend genau berechnen aus der Gleichung:

$$V = \sqrt{2gh} \,.\, \left(1 - \frac{1}{2}\frac{h}{r}\right).$$

Setzt man z. B. $h = 100000^{\text{m}}$, so erhält man für V den Werth:

$$V = 1400 \,.\, \left(1 - \frac{100000}{2 \,.\, 6370000}\right) = 1389^{\text{m}}.$$

Denkt man sich in Fig. 73 den materiellen Punkt in einer der wirkenden Anziehungskraft entgegengesetzten Richtung sich bewegend — also von dem anziehenden Weltkörper sich entfernend — so überzeugt man sich leicht davon, dass die Grösse V zugleich diejenige Anfangsgeschwindigkeit bedeutet, mit welcher der materielle Punkt die Oberfläche des Weltkörpers verlassen müsste, um die Höhe $a - r = h$ als Steighöhe zu erreichen.

Die grösste Höhe der Sonnen-Protuberanzen beträgt nach Zöllner's Beobachtungen $128740000^m = 17350$ geographische Meilen. Wenn diese Protuberanzen — wie von einigen Physikern angenommen wird — Eruptivmassen sind, welche aus dem flüssigen Sonnenkörper emporgeschleudert bis zu der ihrer Anfangsgeschwindigkeit entsprechenden Steighöhe emporsteigen, so würde man die zum Erreichen der oben angegebenen Steighöhe erforderliche Anfangsgeschwindigkeit zu berechnen haben aus der Gleichung:

$$V_1 = \sqrt{2 g_1 h}\left(1 - \frac{2 r_1}{h}\right),$$

indem man darin die Werthe $g_1 = 27{,}4 \,.\, 9{,}81 = 269^m$, $r_1 = 108 \,.\, 6370000^m = 688000000^m$ und $h = 128740000^m$ substituirt, woraus sich der Werth ergiebt:

$$V_1 = 263000\,(1 - 0{,}0936) = 238500^m = 32 \text{ geogr. Meilen.}$$

Um die Dauer der fallenden Bewegung zu berechnen, hat man in der oben gefundenen allgemeinen Gleichung für v seinen Werth $\frac{dx}{dt}$ zu substituiren und alsdann die zweite Integration auszuführen. Man erhält dann die Gleichungen:

$$12)\quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2gr^2x}{a(a-x)}},$$

$$13)\quad dt = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}}\ \sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx,$$

$$14)\quad t = \sqrt{\frac{a}{2gr^2}}\left\{\sqrt{ax-x^2} + \frac{a}{2}\arccos\left(\frac{a-2x}{a}\right)\right\}.$$

Wenn z.B. $a = 2r$ und $x = a - r = r$ ist, so wird $t = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{r}{g}} = 2072$ Secunden.

Für $x = a$ würde man aus obiger Gleichung den Werth erhalten:

$$15)\quad t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a^3}{2gr^2}},$$

und da $gr^2 = pa^2$ ist (nach Gleichung 4), so kann man statt dessen auch setzen:

$$16)\quad t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{2p}}.$$

Nach dieser letzteren Gleichung würde die Falldauer zu berechnen sein, wenn die Masse der Erde im Mittelpunkte concentrirt wäre, und die Fallbewegung bis zu diesem Punkte sich fortsetzte. Indem man $a = 6370000^m$ und $p = g = 9^m,8$ setzt, erhält man unter dieser Voraussetzung den Werth: $t = 900$ Sek. als Dauer des Falls von der Oberfläche bis zum Mittelpunkte der Erde. Für

$$a = 108 \,.\, 6370000^m \text{ und } p = 27{,}4 \,.\, 9{,}8$$

erhält man unter gleicher Voraussetzung den Werth: $t = 1800$ Sek. als Dauer des Falls von der Oberfläche bis zum Mittelpunkte der Sonne. Wenn man ein anderes Mal: $a = 25000000 \,.\, 108 \,.\, 6370000^m$ und $p = \frac{27{,}4 \,.\, 9{,}8}{25000000^2}$ setzt, so erhält man den Werth:

$$t = 7130000 \,.\, 365 \,.\, 24 \,.\, 3600 \text{ Sek., oder } 7130000 \text{ Jahre,}$$

als Dauer der Fallbewegung eines Körpers, dessen Abstand anfangs nahezu so gross war wie die halbe Entfernung des nächsten Fixsterns von der Sonne, und nur um Bruchtheile einer Stunde kürzer würde die Dauer der Fallbewegung bis zur Sonnen-Oberfläche sein, welche der fallende Körper mit einer Geschwindigkeit von etwa 82 Meilen pro Sek. erreichen würde.

Wenn die Fallbewegung mit der Geschwindigkeit c, anstatt mit der Geschwindigkeit Null, begonnen hätte, so würden die Gleichungen 7), 8), 10) die folgenden Formen annehmen:

$$17)\quad \int_c 2v\,dv = 2gr^2 \int_0^x \frac{dx}{(a-x)^2} \quad \text{oder:} \quad v^2 - c^2 = 2gr^2\left(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}\right),$$

$$18)\quad V = \sqrt{c^2 + \frac{2gr(a-r)}{a}},$$

$$19)\quad V_1 = \sqrt{c^2 + 2g_1 r_1}.$$

Dem Werthe $c = 0$ würde die oben nach Gleichung 10) berechnete Geschwindigkeit $V_1 = \sqrt{2g_1 r_1} = 5{,}6$ Meilen $= 41550^m$ entsprechen, als diejenige Geschwindigkeit, mit welcher ein aus unendlicher Höhe auf die Sonne herab fallender Körper die Erdbahn kreuzen würde. Wäre die wirklich beobachtete Geschwindigkeit V_1 grösser als 41550^m, so würde daraus zu folgern sein, dass der fallende Körper in unendlicher Entfernung von der Sonne, d. h. in einer Entfernung, bei welcher die Bewegung des fallenden Körpers durch die Anziehungskraft der Sonne noch nicht merklich beeinflusst wurde, schon eine gegen die Sonne gerichtete Anfangsgeschwindigkeit c gehabt haben musste, welche bei gegebenem Werthe von V_1

aus der obigen Gleichung berechnet werden könnte. So z. B. würde dem Werthe $V_1 = 93000^m$ nach obiger Gleichung der Werth $c = 83000^m$ entsprechen (vgl. § 49).

§ 32.

Bewegung eines von zwei Weltkörpern gleichzeitig angezogenen materiellen Punktes.

Es soll wiederum angenommen werden, dass die Anziehungskraft jedes der beiden unbeweglich und kugelförmig vorausgesetzten Weltkörper so wirkt, wie wenn die Masse im Mittelpunkte desselben concentrirt wäre. Wenn mit p und q resp. die Fallbeschleunigungen an den Oberflächen derselben bezeichnet werden, so sind die Anziehungskräfte P und Q, welche auf den materiellen Punkt bei der in Fig. 74 dargestellten Lage desselben wirken, nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze zu berechnen aus den Gleichungen:

Fig. 74.

$$\frac{P}{mp} = \frac{r^2}{x^2}, \quad \frac{Q}{mq} = \frac{\rho^2}{(a-x)^2}.$$

Die Beschleunigung, welche die Kraftdifferenz $Q-P$ dem materiellen Punkte ertheilt, ist also:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{q\rho^2}{(a-x)^2} - \frac{pr^2}{x^2}.$$

Diese Gleichung nimmt, wenn auf beiden Seiten mit $2\,dx$ multiplicirt und auf der linken Seite $\frac{dx}{dt} = v$ gesetzt wird, die Form an:

$$2\,v\,dv = \frac{2\,q\,\rho^2\,dx}{(a-x)^2} - \frac{2\,pr^2\,dx}{x^2}.$$

Durch Integration derselben erhält man die Gleichung:

$$v^2 = \frac{2\,q\,\rho^2}{a-x} + \frac{2\,p\,r^2}{x} + \text{Const.}$$

Wenn mit v_0 die Anfangsgeschwindigkeit bezeichnet wird, mit welcher der materielle Punkt die Oberfläche des Weltkörpers M verliess, so ist:

$$v_0^2 = \frac{2\,q\,\rho^2}{a-r} + \frac{2\,p\,r^2}{r} + \text{Const.},$$

und man erhält nach Substitution des hieraus für die Constante zu entnehmenden Werthes die Gleichung:

$$v^2 = v_0^2 + 2q\rho^2\left\{\left(\frac{1}{a-x}\right) - \left(\frac{1}{a-r}\right)\right\} + 2pr^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{r}\right).$$

Diejenige Grösse, welche die Anfangsgeschwindigkeit v_0 haben musste, wenn $v = 0$ werden soll in dem Augenblicke, wo $x = u$ wird, kann berechnet werden aus der Gleichung:

$$0 = v_0^2 + 2q\rho^2\left\{\left(\frac{1}{a-u}\right) - \left(\frac{1}{a-r}\right)\right\} + 2pr^2\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{r}\right).$$

Es soll angenommen werden, dass $x = u$ zugleich derjenige Werth von x ist, für welchen $P = Q$ wird; dann ist u zu bestimmen aus der Gleichung:

$$\frac{mpr^2}{u^2} = \frac{mq\rho^2}{(a-u)^2}.$$

Wenn man den aus dieser Gleichung für pr^2 sich ergebenden Werth substituirt, so erhält man für v_0^2 die Gleichung:

$$v_0^2 = 2q\rho^2\left\{\left(\frac{1}{a-r}\right) - \left(\frac{1}{a-u}\right) + \frac{u^2}{(a-u)^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{u}\right)\right\}.$$

Die Stelle, an welcher die beiden Anziehungskräfte P und Q einander im Gleichgewicht halten, zerlegt den Abstand ME in zwei Theile u und $a-u$, für deren Verhältniss aus der vorletzten Gleichung der Werth sich ergiebt:

$$n = \frac{u}{a-u} = \frac{r}{\rho}\sqrt{\frac{p}{q}},$$

und wenn man die aus dieser Gleichung sich ergebenden Werthe:

$$u = \frac{an}{1+n}, \quad a-u = \frac{a}{1+n}$$

in der vorhergehenden Gleichung substituirt, so erhält man für v_0 den Werth:

$$v_0 = \sqrt{2q\rho}\sqrt{\frac{\rho}{a-r} - \frac{\rho}{a}(1+n)^2 + n^2\frac{\rho}{r}}.$$

Wenn mit M und E die Massen der beiden Weltkörper bezeichnet werden, so ergeben sich für die beiden Fallbeschleunigungen p und q aus dem Newton'schen Gesetze die Gleichungen:

$$mp = k\frac{mM}{r^2}, \quad mq = k\frac{mE}{\rho^2}, \quad \frac{p}{q} = \frac{M}{E}\frac{\rho^2}{r^2}$$

und nach Substitution des letzteren Werthes nimmt die oben für die Verhältnisszahl n gefundene Gleichung die Form an:

$$n = \sqrt{\frac{M}{E}}.$$

Denkt man sich den materiellen Punkt die Oberfläche des Weltkörpers M mit einer Anfangsgeschwindigkeit verlassend, welche kleiner ist, als die oben gefundene v_0, so wird seine Geschwindigkeit schon früher Null werden, bevor er die Gleichgewichtsstelle erreicht; er wird also zu dem Weltkörper M wieder zurückkehren. War dagegen seine Anfangsgeschwindigkeit grösser als v_0, so wird er jene Stelle überschreiten und den jenseitigen Weltkörper erreichen.

Die oben gefundene Gleichung würde man z. B. anwenden können, um die Geschwindigkeit zu berechnen, mit welcher ein Körper die Mondoberfläche verlassen müsste, um die Erde zu erreichen. Für diesen Fall würde man die Werthe zu substituiren haben: $n = \sqrt{\frac{M}{E}} = \sqrt{\frac{1}{80}}$, $q = g = 9^m,8$, $\rho = 6370000^m$, $\frac{\rho}{a} = \frac{1}{60}$, $\frac{\rho}{r} = \frac{1}{0,273}$, $\frac{\rho}{a-r} = \frac{1}{60-0,273}$, und man erhält für jene Grenzgeschwindigkeit den Werth $v_0 = 2300^m$. Es müsste also einem von der Mondoberfläche aus geworfenen Körper eine Anfangsgeschwindigkeit ertheilt werden, welche grösser ist als 2300^m, wenn derselbe die Erde erreichen sollte.

Da jedoch die oben gemachte Voraussetzung des Ruhezustandes der beiden Weltkörper weder in Bezug auf die Erde noch in Bezug auf den Mond erfüllt ist, so darf der obige Werth nur als Annäherungswerth betrachtet werden.

§ 33.

Bewegung eines materiellen Punktes unter gleichzeitiger Einwirkung der Schwerkraft und des Widerstandes einer Flüssigkeit.

Der Widerstand, welchen eine Flüssigkeit der Bewegung eines Körpers entgegensetzt, ist — wie die Erfahrung lehrt — annäherungsweise proportional dem Quadrate seiner Geschwindigkeit zu setzen, also zu bestimmen aus der Gleichung:

$$1)\quad W = Av^2,$$

in welcher A einen aus direckten Versuchen zu bestimmenden Erfahrungs-Coefficienten bedeutet. Diejenige Geschwindigkeit k, mit welcher der Körper sich bewegen müsste, damit der Widerstand W so gross wie das Gewicht mg des Körpers werde, findet man aus der Gleichung:

$$2)\quad mg = Ak^2.$$

Man kann hiernach den Erfahrungs-Coefficienten A auch aus-

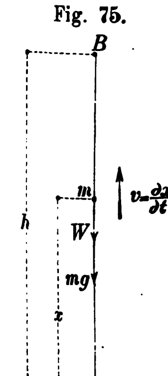
drücken durch diese aus Versuchen zu bestimmende Geschwindigkeit k, indem man den Widerstand W berechnet aus der Gleichung:

$$3)\quad \frac{W}{mg} = \frac{v^2}{k^2}, \quad \text{oder:} \quad W = mg \frac{v^2}{k^2}.$$

Steighöhe.

Bei der steigenden Bewegung wirken das Gewicht mg und der Widerstand W beide der Geschwindigkeit v entgegen (s. Fig. 75); man erhält also für diesen Fall die allgemeine Bewegungsgleichung:

Fig. 75.



$$4)\quad \frac{dv}{dt} = -\left(\frac{mg + W}{m}\right),$$

welche nach Substitution des oben für W gefundenen Werthes die Form annimmt:

$$5)\quad \frac{dv}{dt} = -g\left(1 + \frac{v^2}{k^2}\right).$$

Wenn man diese Gleichung auf beiden Seiten mit $2\,dx$ multiplicirt, hierauf $\frac{dx}{dt} = v$ setzt und dann die Integration ausführt, so ergeben sich daraus der Reihe nach die folgenden Gleichungen:

$$6)\quad 2\frac{dx}{dt}dv = -2\,g\,dx\left(\frac{k^2 + v^2}{k^2}\right),$$

$$7)\quad \int_c^v \frac{2\,v\,dv}{k^2 + v^2} = -\frac{2\,g}{k^2}\int_0^x dx,$$

$$8)\quad \lg\left(\frac{k^2 + v^2}{k^2 + c^2}\right) = -\frac{2\,g\,x}{k^2}.$$

Um hieraus die Höhe h zu berechnen, welche ein mit der Anfangsgeschwindigkeit c senkrecht nach oben geworfener Körper als Steighöhe erreicht, hat man $x = h$ und zugleich $v = 0$ zu setzen; man erhält dann die Gleichung:

$$9)\quad h = \frac{k^2}{2\,g}\lg\left(1 + \frac{c^2}{k^2}\right).$$

Wäre z. B. bekannt, dass bei einer bestimmten gegebenen Kugel der Luftwiderstand gleich ihrem Gewichte wird, wenn dieselbe mit einer Geschwindigkeit $k = 100^m$ sich bewegt, so könnte man die Steighöhe h, welche die

Kugel bei der Anfangsgeschwindigkeit $c = 10^m$ erreichen würde, berechnen aus der Gleichung:

$$h = \frac{100^2}{2 \cdot 9{,}8} \lg\left(1 + \frac{1}{100}\right) = 5^m{,}0745.$$

Ohne das Vorhandensein des Luftwiderstandes würde die Steighöhe $5^m{,}1$ betragen. Es hat also bei geringer Anfangsgeschwindigkeit der Luftwiderstand einen verhältnissmässig kleinen Einfluss auf die Steighöhe.

Setzt man dagegen ein anderes Mal $c = 400^m$, so wird $h = 1445^m$, während ohne das Vorhandensein des Luftwiderstandes der Körper die beträchtlich grössere Steighöhe $h = 8160^m$ erreichen würde.

Fallgeschwindigkeit.

Für die fallende Bewegung, bei welcher der Widerstand W der Schwere entgegenwirkt, erhält man nach Fig. 76 die allgemeine Bewegungsgleichung:

Fig. 76.

$$10)\quad \frac{dv}{dt} = \frac{mg - W}{m} = g\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right),$$

aus welcher man — auf dieselbe Weise wie beim vorigen Falle — durch Multiplication mit $2\,dx$ und nachherige Integration die folgenden Gleichungen ableitet:

$$11)\quad 2\frac{dx}{dt}dv = 2g\,dx\left(1 - \frac{v^2}{k^2}\right),$$

$$12)\quad \int_{v_0}^{v} \frac{2v\,dv}{k^2 - v^2} = \frac{2g}{k^2}\int_0^x dx,$$

$$13)\quad \lg\left(\frac{k^2 - v^2}{k^2 - v_0^2}\right) = -\frac{2gx}{k^2}.$$

Um die Höhe h zu bestimmen, von welcher ein mit der Geschwindigkeit Null seine Bewegung beginnender materieller Punkt herabfallen muss, um die Endgeschwindigkeit V zu erlangen, hat man in dieser Gleichung die Werthe zu substituiren: $v_0 = 0$, $x = h$, $v = V$ und erhält dann die Gleichung:

$$14)\quad h = \frac{k^2}{2g} \lg\left(\frac{k^2}{k^2 - V^2}\right), \text{ oder: } V = k\sqrt{1 - e^{-\frac{2gh}{k^2}}}$$

Diese Gleichung zeigt, dass mit zunehmender Fallhöhe die Fallgeschwindigkeit dem Grenzwerthe k immer mehr sich nähert, ohne denselben je zu erreichen: denn erst für $h = \infty$ wird $V = k$.

Durch Gleichsetzung der in den Gleichungen 9) und 14) für

h gefundenen beiden Werthe erhält man für diejenige Geschwindigkeit V, mit welcher ein vertical aufwärts mit der Anfangsgeschwindigkeit c geworfener Körper unten wieder ankommt, den Werth:

$$15)\quad V = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{k^2}}}.$$

Setzt man wieder $k = 100^m$, so wird, wenn $c = 10^m$ war, $V = 9^m{,}95$; wenn dagegen $c = 400^m$ war, so wird $V = 97^m$, während ohne Vorhandensein des Luftwiderstandes $V = c$ sein würde.

Steigdauer.

Um bei der steigenden Bewegung (Fig. 75) die Geschwindigkeit v als Function der Zeit t darzustellen, hat man die Gleichung 5) zunächst auf die Form:

$$16)\quad \frac{dv}{k^2 + v^2} = -\frac{g}{k^2}\,dt$$

zu bringen und dieselbe alsdann zu integriren. Man gelangt dabei zu folgenden Gleichungen:

$$17)\quad \int_c^v \frac{d\left(\frac{v}{k}\right)}{1 + \left(\frac{v}{k}\right)^2} = -\frac{g}{k}\int_0^t dt,$$

$$18)\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{v}{k} - \operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k} = -\frac{gt}{k}.$$

Setzt man abkürzungsweise $\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k} = \alpha$ und $\frac{gt}{k} = \beta$, so wird:

$$19)\quad \frac{v}{k} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta},$$

und wenn man alsdann für α und β ihre Werthe wiederum substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$20)\quad \frac{v}{k} = \frac{\frac{c}{k} - \operatorname{tg}\frac{gt}{k}}{1 + \frac{c}{k}\operatorname{tg}\frac{gt}{k}}.$$

Aus dieser Gleichung kann man die Steigdauer T berechnen, indem man darin $v = 0$ und $t = T$ setzt, woraus sich der Werth ergiebt:

$$21)\quad T = \frac{k}{g}\operatorname{arc\,tg}\frac{c}{k}.$$

Wenn man wiederum $k = 100^m$ setzt, so erhält man für $c = 10^m$ die Steigdauer $T = 1{,}0177$ Secunden (während ohne Vorhandensein des Luftwiderstandes $T = \frac{10}{9{,}8} = 1{,}02$ Secunden sein würde). Für $c = 400^m$ wird $T = 18{,}52$ Secunden (während ohne Luftwiderstand der Werth $T = \frac{400}{9{,}8} = 40{,}8$ Secunden sich ergeben würde).

Die Gleichung 20) kann man noch benutzen, um die zurückgelegte Wegeslänge x als Function der Zeit t darzustellen. Zu diesem Zwecke hat man darin für v seinen Werth $\frac{dx}{dt}$, ferner für $\operatorname{tg} \frac{gt}{k}$ den Werth $\frac{\sin\left(\frac{gt}{k}\right)}{\cos\left(\frac{gt}{k}\right)}$ zu substituiren und hierauf die zweite Integration auszuführen. Man gelangt dann zu den folgenden Gleichungen:

$$22)\quad \frac{1}{k}\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{c}{k}\cos\left(\frac{gt}{k}\right) - \sin\left(\frac{gt}{k}\right)}{\frac{c}{k}\sin\left(\frac{gt}{k}\right) + \cos\left(\frac{gt}{k}\right)},$$

$$23)\quad \int dx = \frac{k^2}{g}\int\left\{\frac{\frac{c}{k}\cos\frac{gt}{k} - \sin\frac{gt}{k}}{\frac{c}{k}\sin\frac{gt}{k} + \cos\frac{gt}{k}}\right\} d\left(\frac{gt}{k}\right),$$

$$24)\quad x = \frac{k^2}{g}\lg\left\{\frac{c}{k}\sin\frac{gt}{k} + \cos\frac{gt}{k}\right\}.$$

Die letztere Gleichung liefert wiederum die Steighöhe $x = h$ (Gleichung 9), sobald darin für t die Steigdauer T (Gleichung 21) substituirt wird.

Falldauer.

Um für die fallende Bewegung (Fig. 76) die Geschwindigkeit v und die durchfallene Höhe x als Functionen der Zeit t darzustellen, hat man zunächst in der Gleichung 10), welcher man auch die folgende Form:

$$25)\quad \frac{dv}{k^2 - v^2} = \frac{g}{k^2}\,dt$$

geben kann, für $k^2 - v^2$ den Werth zu substituiren, welcher aus der Gleichung:

$$26)\quad \frac{1}{k+v}+\frac{1}{k+v}=\frac{2k}{k^2-v^2}$$

sich ergiebt, und hierauf die Integration auszuführen. Man erhält dann die folgenden Gleichungen:

$$27)\quad \int_0^v \frac{dv}{k+v}+\int_0^v \frac{dv}{k-v}=\frac{2g}{k}\int_0^t dt,$$

$$28)\quad \lg\left(\frac{k+v}{k-v}\right)=\frac{2gt}{k},\quad \text{oder:}\quad v=\frac{k\left(e^{\frac{2gt}{k}}-1\right)}{e^{\frac{2gt}{k}}+1},$$

deren letztere zeigt, dass die Geschwindigkeit v der Grösse k als oberem Grenzwerthe unaufhörlich sich nähert, ohne denselben je zu erreichen; denn erst für $t=\infty$ wird $v=k$.

Wenn man in der letzteren Gleichung wieder $\frac{dx}{dt}$ statt v setzt und auf der rechten Seite Zähler und Nenner mit $e^{-\frac{gt}{k}}$ multiplicirt, so erhält man durch Ausführung der zweiten Integration die Gleichung:

$$29)\quad \int_0^x dx=\frac{k^2}{g}\int_0^t \left\{\frac{e^{\frac{gt}{k}}-e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}}+e^{-\frac{gt}{k}}}\right\} d\left(\frac{gt}{k}\right),$$

$$30)\quad x=\frac{k^2}{g}\lg\left(\frac{e^{\frac{gt}{k}}+e^{-\frac{gt}{k}}}{2}\right),\quad \text{oder:}$$

$$31)\quad t=\frac{k}{g}\lg\left\{e^{\frac{gx}{k^2}}+\sqrt{e^{\frac{2gx}{k^2}}-1}\right\}.$$

Nach der letzteren Gleichung kann man, wenn darin $x=h$ gesetzt wird, die der ganzen Fallhöhe h entsprechende Falldauer berechnen.

Setzt man wieder $k=100^{\text{m}}$ und (wie bei dem ersten der oben berechneten beiden Zahlenbeispiele gefunden wurde) $x=h=5^{\text{m}},0745$, so wird $t=1{,}018$ Secunden. Für den zweiten Fall, bei welchem $h=1445^{\text{m}}$ gefunden wurde, erhält man die Fallzeit $t=21{,}35$ Secunden.

Dieselben Werthe würde man für t aus Gleichung 28) erhalten, wenn man darin für v die oben berechneten Werthe der Endgeschwindigkeit V substituirte.

Berechnung der Geschwindigkeit des gleichförmigen Fallens.

Den Widerstand, welchen eine Flüssigkeit der Bewegung eines

Körpers entgegensetzt, kann man annähernd berechnen nach der Erfahrungsformel:

$$32)\quad W = \zeta \gamma F \frac{v^2}{2g},$$

in welcher v die Geschwindigkeit, F die rechtwinkelig zur Bewegungsrichtung genommene grösste Querschnittsfläche des Körpers, γ das Gewicht der Flüssigkeit pro Cubikmeter und ζ einen Erfahrungs-Coefficienten bezeichnet, welcher für kugelförmige Körper ungefähr den Werth 0,5 hat. Um hiernach für einen kugelförmigen Körper die Geschwindigkeit des gleichförmigen Fallens zu berechnen, würde man in der obigen Gleichung k statt v und das Gewicht der Kugel Q statt W zu substituiren haben — vorausgesetzt, dass die Flüssigkeit im Verhältniss zu dem Stoffe, aus welchem die Kugel besteht, sehr leicht ist. Wenn also mit γ_1 das Gewicht des Stoffes der Kugel pro Cubikeinheit und mit r der Halbmesser derselben bezeichnet wird, so ist die Geschwindigkeit k zu bestimmen aus der Gleichung:

$$33)\quad \gamma_1 \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi = \zeta \gamma r^2 \pi \frac{k^2}{2g}, \quad \text{oder:} \quad k = \sqrt{\frac{8 \gamma_1 r g}{3 \gamma \zeta}}.$$

Für eine eiserne Kugel, welche sich in gewöhnlicher atmosphärischer Luft bewegt, würde $\gamma_1 = 7500$ Kil. und $\gamma = 1{,}293$ zu setzen sein. Man erhält hiernach z. B. für denjenigen Halbmesser, welchen eine eiserne Kugel haben müsste, wenn die Geschwindigkeit $k = 100^{\mathrm{m}}$ sein soll, indem man $\zeta = 0{,}5$ setzt, den Werth:

$$r = \frac{3}{8} \cdot 0{,}5 \cdot \frac{1{,}293}{7500} \cdot \frac{100^2}{9{,}8} = 0^{\mathrm{m}}{,}033.$$

Wenn der Unterschied zwischen dem specifischen Gewichte der Flüssigkeit und dem specifischen Gewichte des Stoffes, aus welchem die Kugel besteht, nicht sehr gross ist, so hat man zu berücksichtigen, dass die Geschwindigkeit des gleichförmigen Sinkens in diesem Falle verschieden ist von der oben mit k bezeichneten Widerstandsgeschwindigkeit, und man hat, um die erstere zu berechnen, statt γ_1 die Differenz der beiden Gewichte pro Cubikeinheit zu setzen.

So z. B. würde man für die Bewegung der eisernen Kugel in Wasser die Werthe zu substituiren haben: $\gamma = 1000$ Kil., $\gamma_1 = 7500 - 1000 = 6500$ Kil. und erhielte für denjenigen Halbmesser, welchen die Kugel haben müsste, um bei einer Geschwindigkeit von 100^{m} gleichförmig zu sinken, den Werth:

$$r = \frac{3}{8} \cdot 0{,}5 \cdot \frac{1000}{6500} \cdot \frac{100^2}{9{,}8} = 28^{\mathrm{m}}{,}28.$$

Wenn dagegen die Geschwindigkeit des gleichförmigen Sinkens nur $0^{\mathrm{m}}{,}001$ betragen sollte, so müsste der Halbmesser der eisernen Kugel die Grösse $r = 0^{\mathrm{m}}{,}000\,000\,002\,828$ haben.

§ 34.

Bewegung eines materiellen Punktes unter alleiniger Einwirkung eines von seiner Geschwindigkeit abhängenden Widerstandes.

Wäre der Widerstand W der ersten Potenz der Geschwindigkeit v proportional, so würde man $W = Av$ setzen können, und für die Bewegungsgleichung die Form erhalten:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{Av}{m},$$

oder wenn man abkürzungsweise den constanten Factor $\frac{A}{m} = a$ setzt, die einfachere Form:

$$\frac{dv}{dt} = -av.$$

Um die Geschwindigkeit v als Function der zurückgelegten Wegeslänge x darzustellen, hat man diese Gleichung mit dt zu multipliciren und auf der rechten Seite dx statt $v\,dt$ zu setzen. Durch Integration derselben erhält man die folgende Gleichung:

$$\int_{v_0}^{v} dv = -a\int_0^x dx, \quad \text{oder:} \quad v = v_0 - ax,$$

aus welcher sich ergiebt, dass $v = 0$ wird, wenn $x = \frac{v_0}{a}$ geworden ist. Es wird also der mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 seine Bewegung beginnende materielle Punkt nach Zurücklegung der Strecke $\frac{v_0}{a}$ zur Ruhe gelangen.

Um die Grössen v und x als Functionen der Zeit t darzustellen, hat man der ursprünglichen Bewegungsgleichung die Form zu geben:

$$\frac{dv}{v} = -a\,dt.$$

Durch Integration derselben gelangt man zu folgenden Gleichungen:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -a\int_0^t dt, \quad \lg\left(\frac{v}{v_0}\right) = -at, \quad v = v_0 e^{-at}.$$

Wenn man den letzteren Werth dem vorher für v gefundenen Werthe gleichsetzt, so erhält man für x die Gleichung:

$$x = \frac{v_0}{a}\left(1 - e^{-at}\right).$$

Diese Gleichung zeigt, dass erst dann $x = \frac{v_0}{a}$ wird, wenn $t = \infty$ geworden ist. Es wird also der materielle Punkt erst nach unendlich langer Zeit zur Ruhe gelangen; d. h. er wird dem Endpunkte der Strecke $\frac{v_0}{a}$ unaufhörlich sich nähern, ohne denselben je zu erreichen.

Wenn man ein anderes Mal wie im vorigen Paragraphen $W = Av^2$ und wiederum abkürzungsweise $\frac{A}{m} = a$ setzt, so erhält man die Bewegungsgleichung:

$$\frac{dv}{dt} = -av^2,$$

aus welcher man durch Multiplication mit dx und nachherige Integration die Gleichung ableitet:

$$\frac{dx}{dt}dv = -av^2 dx, \quad \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -a \int_0^x dx,$$

$$\lg\left(\frac{v}{v_0}\right) = -ax, \quad v = v_0 e^{-ax}.$$

Statt dessen kann man auch (um v als Function von t zu erhalten) der obigen Gleichung die Form geben:

$$-\frac{dv}{v^2} = a dt,$$

und die Integration derselben führt alsdann zu folgenden Gleichungen:

$$-\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = a \int_0^t dt, \quad \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = at, \quad v = \frac{v_0}{1 + av_0 t}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden für v gefundenen Werthe erhält man für x die Gleichung:

$$x = \frac{1}{a} \lg(1 + av_0 t).$$

Die vorletzte Gleichung zeigt, dass hier ebenso wie beim vorigen Falle die Geschwindigkeit erst nach, unendlich langer Zeit gleich Null wird. Die letzte Gleichung zeigt, dass für $t = \infty$ auch $x = \infty$ wird im Gegensatze zu dem vorigen Falle, bei welchem mit wachsender Zeit die zurückgelegte Wegeslänge einem endlichen Grenzwerthe sich näherte.

Wenn man bei dem zuletzt behandelten Falle den Widerstand W als von einer Flüssigkeit herrührend betrachtet, so ergiebt sich aus der Vergleichung des hier für W angenommenen Werthes mit dem im vorigen Paragraphen für diesen Widerstand gefundenen Werthe, dass die Constante a die Grösse $\frac{g}{k^2}$ hat. Man kann daher den hier gefundenen Gleichungen auch die folgenden Formen geben:

$$v = v_0 e^{-\frac{g}{k^2}x} = \frac{v_0}{1 + \frac{g}{k^2} v_0 t}, \quad x = \frac{k^2}{g} \lg\left(1 + \frac{g}{k^2} v_0 t\right).$$

Setzt man wiederum $k = 100^m$ und (wie bei dem zweiten im vorigen Paragraphen berechneten Zahlenbeispiele) $v_0 = 400^m$, so ergeben sich für $t = 2$ Secunden die Werthe:

$$v = \frac{400}{1 + \frac{9,8}{100^2} \cdot 400 \cdot 2} = 224^m,2.$$

$$x = \frac{100^2}{9,8} \lg\left(1 + \frac{9,8}{100^2} \cdot 400 \cdot 2\right) = 590^m,7.$$

Da die Bahnlinie einer in horizontaler Richtung abgeschossenen Kanonenkugel anfangs nahezu eine horizontale gerade Linie bildet, so würde man auf die hier angegebene Weise für den ersten Theil der Bahnlinie die allmählich abnehmende Geschwindigkeit der Kugel, sowie die von derselben zurückgelegte Wegeslänge annäherungsweise berechnen können. Es ist jedoch dabei zu berücksichtigen, dass die hier gemachte Voraussetzung, nach welcher der Luftwiderstand stets dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional wirken sollte, nur annäherungsweise der Wirklichkeit entspricht, und dass namentlich bei so grossen Geschwindigkeiten, wie die hier als Beispiel gewählte, diese Voraussetzung als ungenau sich erweisen würde.

§ 35.

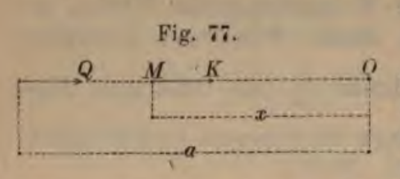
Bewegung eines materiellen Punktes unter Einwirkung einer dem Abstande von einem festen Anziehungscentrum proportionalen Anziehungskraft.

Wenn mit Q die Grösse bezeichnet wird, welche die von dem festen Punkte O auf den materiellen Punkt übertragene Anziehungskraft bei dem Abstande a hat, und mit K die Grösse, welche diese Anziehungskraft bei dem Abstande x annimmt, so ergiebt sich aus der gemachten Voraussetzung, nach welcher die Anziehungskraft stets proportional dem Abstande wirken soll, die Gleichung:

$$\frac{K}{Q} = \frac{x}{a},$$

aus welcher man für jeden Werth von x den zugehörigen Werth von K berechnen kann, sobald die beiden Grössen Q und a gegeben sind (Fig. 77).

Fig. 77.



Nach § 2 wird die Beschleunigung der Bewegung durch den zweiten Differenzial-Quotienten des Weges nach der Zeit dargestellt. Da die Kraft K dem Wachsen von x entgegenwirkt, so ist die Beschleunigung im vorliegenden Falle eine negative Grösse. Man erhält also für die der Masse m des materiellen Punktes von der Kraft K ertheilte Beschleunigung die Gleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Q}{ma} \cdot x,$$

in welcher der Factor $\frac{Q}{ma}$ als eine gegebene constante Grösse zu betrachten ist. Wenn abkürzungsweise:

$$\sqrt{\frac{Q}{ma}} = k$$

gesetzt wird, so nimmt diese Gleichung die einfachere Form an:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x.$$

Als allgemeines Integral dieser Differenzialgleichung erhält man durch zweimalige Integration derselben die Gleichung:

$$x = A \sin kt + B \cos kt,$$

in welcher A und B constante Grössen sind, welche aus den gegebenen Anfangswerthen von x und $\frac{dx}{dt}$ bestimmt werden können. Für die Geschwindigkeit v erhält man aus dieser Gleichung, indem man dieselbe differenziirt, den Ausdruck:

$$\frac{dx}{dt} = v = Ak \cos kt - Bk \sin kt.$$

Wenn also mit x_0 und v_0 die Werthe bezeichnet werden, welche resp. die Grössen x und v für $t = 0$ annehmen, so ergeben sich zur Bestimmung jener beiden Constanten die Gleichungen:

$$x_0 = 0 + B, \quad v_0 = Ak - 0,$$

und wenn man die hieraus für dieselben sich ergebenden Werthe

substituirt, so nehmen die oben gefundenen Gleichungen die Formen an:

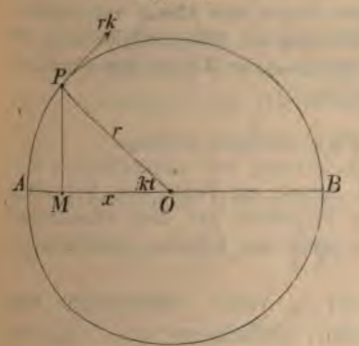
$$x = \frac{v_0}{k} \sin kt + x_0 \cos kt, \qquad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos kt - x_0 k \sin kt.$$

Es sollen diese Gleichungen zunächst auf den speciellen Fall angewendet werden, in welchem die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ war. Setzt man zugleich $x_0 = r$, so wird:

$$x = r \cos kt \text{ und } \frac{dx}{dt} = -rk \sin kt.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich für $kt = \pi$ die Werthe $x = -r$ und $\frac{dx}{dt} = 0$; für $kt = 2\pi$ erhält man die Werthe $x = +r$ und $\frac{dx}{dt} = 0$; für $kt = 3\pi$ wird wieder $x = -r$ und $\frac{dx}{dt} = 0$. Die Bewegung des materiellen Punktes ist also eine zwischen den Endpunkten A und B der Strecken $+r$ und $-r$ hin und her schwingende Bewegung (Fig. 78).

Fig. 78.



Denkt man sich einen zweiten materiellen Punkt gleichzeitig mit dem vorigen seine Bewegung bei A beginnend und längs der Peripherie des vom Anziehungscentrum O aus mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreises in solcher Weise sich bewegend, dass der Radius desselben mit der constanten Winkelgeschwindigkeit k sich dreht, so ergiebt sich, dass die Bewegung der Projection dieses zweiten Punktes auf dem Durchmesser AB genau übereinstimmt mit der Bewegung jenes ersten materiellen Punktes. In derselben Zeit, welche der zweite Punkt braucht, um die halbe Peripherie des Kreises zu durchlaufen, legt der erste die Länge des Durchmessers AB zurück, und man erhält für die Dauer einer solchen Schwingung, indem man $kt = \pi$ setzt, die Gleichung:

$$t = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{ma}{Q}},$$

welche zeigt, dass die Schwingungsdauer unabhängig ist von der Schwingungsweite $2r$.

Die Geschwindigkeit des schwingenden Punktes wird am grössten in dem Augenblicke, wo derselbe den Mittelpunkt seiner Schwingungsbahn durchläuft, und man erhält für diese grösste Geschwindigkeit, indem man für kt ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ oder $\sin kt = \pm 1$ setzt, den Ausdruck:

$$V = \pm rk = \pm r\sqrt{\frac{Q}{ma}}.$$

Wenn z. B. der Erdmittelpunkt das Anziehungscentrum bildete, und vorausgesetzt werden dürfte, dass bei einem längs des Durchmessers durch das Innere der Erdkugel sich bewegenden materiellen Punkte das Gewicht stets proportional dem Abstande vom Erdmittelpunkte sich ändert, so würde $Q = mg$ zu setzen sein, wenn unter a der Erdhalbmesser verstanden wird, und man erhielte für die Schwingungsdauer den Werth:

$$t = \pi\sqrt{\frac{ma}{mg}} = 3{,}14\sqrt{\frac{6370000}{9{,}8}} = 2532 \text{ Secunden.}$$

Es würde also ein am einen Ende in einen längs des Durchmessers durch die Erde getriebenen Schacht hineinfallender Körper nach Ablauf von 42 Minuten und 12 Secunden an der jenseitigen Mündung die Erdoberfläche wieder erreichen. Für die Geschwindigkeit, mit welcher dieser Körper den Erdmittelpunkt passiren würde, ergiebt sich der Werth:

$$V = a\sqrt{\frac{mg}{ma}} = \sqrt{ga} = \sqrt{9{,}8 \,.\, 6370000} = 7900^{\text{m}}.$$

Mit eben derselben Geschwindigkeit müsste ein Punkt den Erdumfang durchlaufen, wenn die Bewegung seiner Projection auf dem Durchmesser übereinstimmen sollte mit der Bewegung jenes den Schacht durchfallenden Körpers.

Den Fall, wo v_0 von Null und x_0 von r verschieden war, kann man auf den eben behandelten einfacheren Fall dadurch zurückführen, dass man aus den oben gefundenen allgemeinen Gleichungen zunächst denjenigen Werth von t berechnet, für welchen $\frac{dx}{dt} = 0$ wird, und der Abstand x seinen grössten Werth r annimmt. Wenn man dann den Endpunkt dieses Zeitabschnitts als Anfangspunkt der Bewegung betrachtet, so nehmen die allgemeinen Gleichungen wiederum die dem vorigen Falle entsprechenden einfacheren Formen an. Bei Anwendung dieses Verfahrens erhält man für t und r die Gleichungen:

$$0 = v_0 \cos kt - x_0 k \sin kt, \quad \text{oder:} \quad \operatorname{tg} kt = \frac{v_0}{k_0 x}, \text{ und:}$$

$$r = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}.$$

§ 36.

Bewegung des materiellen Punktes unter Einwirkung einer dem Abstande von einem festen Punkte proportionalen Abstossungskraft.

Wenn man in der Gleichung, welche für den im vorigen Paragraphen behandelten Fall den Ausgangspunkt der Rechnung bildete, die Grösse $-k^2$ vertauscht mit $+k^2$, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = +k^2 x,$$

nach welcher für den vorliegenden Fall die Bewegung des materiellen Punktes zu bestimmen ist. Das allgemeine Integral dieser Differenzialgleichung ist:

$$x = Ae^{+kt} + Bke^{-kt}.$$

Für die Geschwindigkeit v ergiebt sich hieraus der allgemeine Ausdruck:

$$v = \frac{dx}{dt} = Ake^{+kt} - Bke^{-kt}.$$

Zur Bestimmung der Constanten A und B erhält man, indem man die dem Werthe $t = 0$ entsprechenden Anfangswerthe $x = x_0$ und $v = v_0$ substituirt, die Gleichungen:

$$x_0 = A + B \text{ und } v_0 = Ak - Bk.$$

Nach Substitution der hieraus sich ergebenden Werthe nehmen die obigen allgemeinen Gleichungen die Formen an:

$$x = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0}{k}\right)e^{+kt} + \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0}{k}\right)e^{-kt}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(x_0 k + v_0)e^{+kt} - \frac{1}{2}(x_0 k - v_0)e^{-kt}.$$

Für den speciellen Fall, in welchem $v_0 = kx_0$ war, erhält man die einfacheren Gleichungen:

$$x = x_0 e^{+kt}, \quad \frac{dx}{dt} = kx_0 e^{+kt};$$

und wenn man ein anderes Mal $v_0 = -kx_0$ setzt, so wird:

$$x = x_0 e^{-kt}, \quad \frac{dx}{dt} = -x_0 k e^{-kt}.$$

Im letzteren Falle wird $x = 0$ und $\frac{dx}{dt} = 0$, wenn $t = \infty$ wird, d. h. in diesem Falle nähert sich der materielle Punkt dem abstossenden festen Punkte unaufhörlich, ohne denselben jemals zu erreichen.

Capitel VIII.

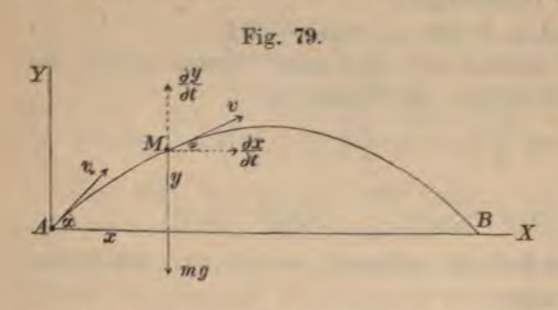
Krummlinige Bewegung des materiellen Punktes.

§ 37.

Bewegung eines geworfenen Körpers unter alleiniger Einwirkung der Schwerkraft.

Die Bewegung, welche ein materieller Punkt unter Einwirkung der Schwerkraft ausführt, ist eine krummlinige, sobald die Anfangsgeschwindigkeit nicht mit der Richtung der Schwere zusammenfällt. Nach dem Gesetze der Unabhängigkeit der Bewegungen (§ 29) erfolgt eine jede von den beiden Seitenbewegungen — die horizontale sowohl wie die verticale — genau so, als ob die andere nicht vorhanden wäre. Da die Schwerkraft vertical abwärts wirkt, so ist die horizontale Seitenbewegung gleichförmig, die verticale dagegen eine beschleunigte oder verzögerte, je nachdem die verticale Seitengeschwindigkeit abwärts oder aufwärts gerichtet ist. Hieraus ergeben sich nach der in Fig. 79 gewählten Bezeichnungsweise für die beiden Seitenbewegungen die Gleichungen:

Fig. 79.



$$1)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$2)\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

Durch einmalige Integration derselben erhält man die folgenden beiden Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = \text{Const.}, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + \text{Const.}$$

Um die beiden Constanten zu bestimmen, hat man die dem Werthe $t = 0$ entsprechenden Anfangswerthe $v_0 \cos \alpha$ und $v_0 \sin \alpha$ für die beiden Seitengeschwindigkeiten einzusetzen. Die obigen beiden Gleichungen nehmen nach Substitution der auf solche Weise gefundenen Werthe dann die Formen an:

$$3)\quad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \qquad 4)\quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Für die Grösse und Richtung der Resultirenden von diesen beiden Seitengeschwindigkeiten ergeben sich hieraus die Gleichungen:

$$5)\quad v = \sqrt{(v_0 \cos\alpha)^2 + (v_0 \sin\alpha - gt)^2},$$

$$6)\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha}.$$

Die Geschwindigkeit v kann als Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks angesehen werden, dessen horizontale Kathete die von t unabhängige Länge $v_0 \cos\alpha$ hat. Wenn man also das in § 8 mit Bezug auf Fig. **10** und Fig. **11** erklärte Verfahren auf den vorliegenden Fall anwendet und von irgend einem Punkte O aus die sämmtlichen auf einander folgenden Geschwindigkeiten nach Grösse und Richtung abträgt, so liegen die Endpunkte A, M, B aller dieser Strecken in einer und derselben Verticalen (Fig. **80**).

Fig. 80.

Die Ausführung der zweiten Integration führt zu den beiden Gleichungen:

$$7)\quad x = v_0 \cos\alpha \,.\, t,$$

$$8)\quad y = v_0 \sin\alpha \,.\, t - \frac{gt^2}{2},$$

insofern die beiden Constanten hier Null sind, da für $t = 0$ auch $x = 0$ und $y = 0$ sein muss. Durch Elimination der Grösse t erhält man die Gleichung der Bahnlinie:

$$9)\quad y = \operatorname{tg}\alpha \,.\, x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos\alpha^2} \,.\, x^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Bahnlinie eine Parabel mit verticaler Achse ist. Um die Coordinaten des Scheitelpunktes dieser Parabel zu finden, hat man $\frac{dy}{dx} = 0$ zu setzen und erhält die Werthe:

$$10)\quad x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \qquad 11)\quad y = \frac{v_0^2 \sin\alpha^2}{2g}.$$

Wenn man Gleichung 9) für $\operatorname{tg}\alpha$ auflösst (indem man $\frac{1}{\cos\alpha^2} = 1 + \operatorname{tg}\alpha^2$ setzt), so erhält man für denjenigen Winkel, welchen die Anfangsgeschwindigkeit v_0 mit der Horizontalen bilden musste, damit ein durch seine Coordinaten x und y gegebener Punkt M getroffen werde, die Gleichung:

$$12)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{g\,x} \pm \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2\,x^2} - \left(1 + \frac{2\,v_0^2\,y}{g\,x^2}\right)}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass es im Allgemeinen für die Anfangsgeschwindigkeit v_0 immer zwei Richtungen giebt, bei welchen der vorgeschriebene Punkt durch die Bahnlinie getroffen wird. Eine Ausnahme bildet derjenige Fall, in welchem der gegebene Punkt eine solche Lage hat, dass der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen Null wird; für diesen Fall giebt es nur einen Werth von α, welcher der Bedingung genügt. Wenn aber der gegebene Punkt eine solche Lage hätte, dass der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen negativ wäre, so würde $\operatorname{tg}\alpha$ imaginär werden, woraus zu schliessen ist, dass in diesem Falle der gegebene Punkt überhaupt nicht erreichbar sein würde bei der gegebenen Grösse der Anfangsgeschwindigkeit v_0. Wenn man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen gleich Null setzt, so erhält man die Gleichung:

$$13)\quad y = \frac{v_0^2}{2\,g} - \frac{g\,x^2}{2\,v_0^2}$$

als Gleichung der Grenzlinie, welche in der verticalen Bahnebene das Gebiet der erreichbaren Punkte einschliesst und von dem Gebiete der unerreichbaren Punkte trennt. Diese krumme Linie ist wiederum eine Parabel mit verticaler Achse, und zwar liegt der Scheitelpunkt derselben vertical über dem Punkte A in der Höhe:

$$14)\quad h = \frac{v_0^2}{2\,g},$$

welche der Anfangsgeschwindigkeit v_0 als Fallhöhe entspricht. Wenn man der Gleichung dieser Parabel die Form giebt:

$$15)\quad h - y = \frac{x^2}{4\,h},$$

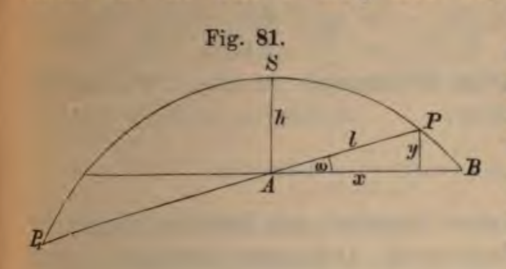
so erkennt man zugleich, dass der Anfangspunkt A den Brennpunkt und die Grösse $2\,h$ den Parameter derselben bildet.

Legt man durch den Punkt A eine gerade Linie, welche den Winkel ω mit der Horizontalen einschliesst, so bilden die Durchschnittspunkte derselben mit jener Grenzparabel die Endpunkte für die grösste in dieser Richtung erreichbare Wurfweite. Durch Substitution der aus Fig. 81 zu entnehmenden Werthe $x = l\cos\omega$ und $y = l\sin\omega$ erhält man für dieses Maximum der erreichbaren Wurfweite aus Gleichung 15) den Ausdruck:

$$16)\quad l = \frac{2\,h}{\pm 1 + \sin\omega},$$

in welchem das Pluszeichen auf die Strecke AP, das Minuszeichen auf die Strecke AP_1 sich bezieht. Für $\omega = 0$ wird $l = \pm 2h$; es ist also das Maximum der auf horizontaler Ebene zn erreichenden Wurfweite doppelt so gross, als die der Anfangsgeschwindigkeit v_0 entsprechende Fallhöhe.

Fig. 81.

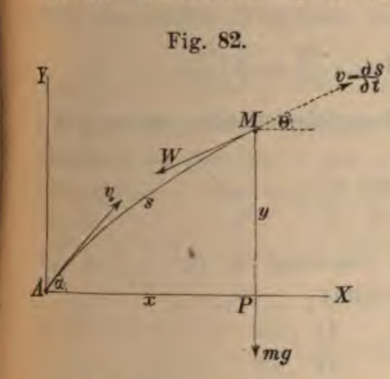


§ 38.

Bewegung des geworfenen Körpers unter gleichzeitiger Einwirkung der Schwerkraft und des Luftwiderstandes.

Es soll auch hier wieder (wie in § 33) vorausgesetzt werden, dass der Luftwiderstand W dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional und stets der Bewegungsrichtung entgegen wirkt. Nach der in Fig 82 gewählten Bezeichnungsweise ergeben sich dann für die beiden Seitenbewegungen die Gleichungen:

Fig. 82.



$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{W \cos \theta}{m},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{- mg - W \sin \theta}{m},$$

wofür man mit Benutzung des schon in § 34 eingeführten Werthes $\frac{W}{m} = a v^2$ auch setzen kann:

$$1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = - a v^2 \cos \theta, \qquad 2) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = - g - a v^2 \sin \theta.$$

Die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ ist die Resultirende der beiden Seitengeschwindigkeiten:

$$3) \quad \frac{dx}{dt} = v_x = v \cos \theta, \qquad 4) \quad \frac{dy}{dt} = v_y = v \sin \theta,$$

und wenn man der Bedeutung des zweiten Differenzialquotienten gemäss:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}, \qquad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt}$$

setzt, so nehmen die obigen beiden Gleichungen die folgenden Formen an:

$$5)\quad \frac{dv_x}{dt} = -a\,v\,v_x, \qquad 6)\quad \frac{dv_y}{dt} = -g - a\,v\,v_y.$$

Um die erstere dieser beiden Gleichungen zu integriren, hat man derselben die Form zu geben:

$$7)\quad \frac{dv_x}{v_x} = -a\,.\,v\,dt = -a\,ds$$

und erhält durch Integration derselben mit Berücksichtigung des Umstandes, dass die horizontale Anfangsgeschwindigkeit gleich $v_0 \cos\alpha$ war, die Gleichung:

$$8)\quad \lg\left(\frac{v_x}{v_0 \cos\alpha}\right) = -a\,s, \text{ oder: } v_x = v_0 \cos\alpha\,.\,e^{-as}.$$

Um die Integration der die verticale Seitenbewegung betreffenden Gleichung auszuführen, kann man auf folgende Weise verfahren. Setzt man abkürzungsweise:

$$9)\quad \operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx} = p, \text{ oder: } \frac{dy}{dt} = p\frac{dx}{dt},$$

so erhält man für den zweiten Differenzialquotienten von y nach t den Ausdruck:

$$10)\quad \frac{d^2y}{dt^2} = p\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dp}{dt}\frac{dx}{dt},$$

welcher nach Substitution des in Gleichung 5) für $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}$ angegebenen Werthes die Form annimmt:

$$11)\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -a\,v\,v_x\,p + \frac{dp}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

Wenn man diesen Ausdruck dem in Gleichung 6) für $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt}$ gefundenen Werthe gleichsetzt, so erhält man die Gleichung:

$$12)\quad \frac{dp}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} = -g,$$

welche durch $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ dividirt nach Substitution des in Gleichung 8) für $\frac{dx}{dt} = v_x$ gefundenen Werthes die Form annimmt:

$$13)\quad \frac{dp}{dx} = -\frac{g}{v_0^2 \cos\alpha^2}\cdot e^{2as}.$$

Die Bahnlinie wird in ihrem oberhalb der Horizontalen des Anfangspunktes liegenden Theile eine um so flachere Curve bilden,

je kleiner der Winkel α ist, um welchen die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit v_0 von der Horizontalen abweicht. Wenn also dieser Winkel sehr klein ist — wie hier vorausgesetzt werden soll — so ist es zulässig, die Bogenlänge $AM = s$ mit ihrer Horizontalprojection $AP = x$ zu vertauschen, und die vorige Gleichung durch die folgende zu ersetzen:

$$14)\quad dp = -\frac{g}{v_0^2 \cos \alpha^2} e^{2ax} dx.$$

Wenn man diese Gleichung integrirt — und zwar auf der rechten Seite zwischen den Grenzen 0 und x, auf der linken zwischen den Grenzen $\operatorname{tg}\alpha$ und p, so erhält man die Gleichung:

$$15)\quad p - \operatorname{tg}\alpha = \frac{g}{2\,a\,v_0^2 \cos \alpha^2}(1 - e^{2ax}),$$

und wenn man hierin wieder $\frac{dy}{dx}$ statt p setzt, so erhält man durch abermalige Integration als Gleichung der Bahnlinie:

$$16)\quad y = x\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{2\,a\,v_0^2 \cos \alpha^2}\right) - \frac{g}{4\,a^2\,v_0^2 \cos \alpha^2}(e^{2ax} - 1).$$

Um die Grösse x als Function der Zeit t darzustellen, hat man in Gleichung 8) ebenfalls s mit x zu vertauschen und dieselbe dann zu integriren. Man gelangt dadurch zu folgenden Gleichungen:

$$17)\quad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \,.\, e^{-ax}, \quad e^{ax} dx = v_0 \cos \alpha \,.\, dt,$$

$$18)\quad e^{ax} - 1 = a\,v_0 \cos \alpha \,.\, t,$$

$$19)\quad x = \frac{1}{a} \lg (1 + a\,v_0 \cos \alpha \,.\, t).$$

Wenn man $y = 0$ und $x = L$ setzt, so erhält man aus Gleichung 16) für denjenigen Werth von α, bei welchem eine vorgeschriebene Wurfweite $x = L$ auf der Horizontalebene erreicht wird, die Gleichung:

$$20)\quad \sin 2\,\alpha = \frac{g}{2\,a^2\,v_0^2}\left(\frac{e^{2aL} - 2\,a\,L - 1}{L}\right).$$

Nach § 33 und § 34 ist $a = \frac{g}{k^2}$ zu setzen, worin k diejenige Geschwindigkeit bedeutet, bei welcher der Luftwiderstand gleich dem Gewichte des geworfenen Körpers ist. Wenn also — wie bei den dort berechneten Zahlenbeispielen — wieder $k = 100^{m}$ angenommen wird, so ist $a = 0{,}000\,98$ zu setzen. Wenn ferner $L = 1000^{m}$ und $v = 400^{m}$ gegeben ist, so wird nach Gleichung 20) $\sin 2\,\alpha = 0{,}132\,268$ oder $2\,\alpha = 7^{0}\,35'$. Es muss also die Richtung

der Anfangsgeschwindigkeit um einen Winkel von 3° 47',5 nach oben hin von der Horizontalen abweichen, wenn ein 1000^m entfernter, in gleicher Höhe mit dem Anfangspunkte befindlicher Zielpunkt getroffen werden soll. Für die ganze Wurfzeit erhält man aus Gleichung 18), indem man darin $x = 1000^m$, $v_0 = 400^m$, $\alpha = 3° 47',5$ setzt, den Werth: $t = 4,26$ Secunden, und für die horizontale Endgeschwindigkeit aus Gleichung 17) den Werth $\frac{dx}{dt} = 150^m$. Für die Tangente des Neigungswinkels der Endgeschwindigkeit gegen die Horizontale erhält man ferner aus Gleichung 15) den Werth: $p = -0,1257$, woraus sich ergiebt, dass die Richtung der Endgeschwindigkeit um einen Winkel von 7° 10' nach unten hin von der Horizontalen abweicht.

An dem höchsten Punkte der Bahnlinie ist die Bewegung horizontal gerichtet. Setzt man $p = 0$ und $x = l$ in Gleichung 15), so erhält man durch Auflösung derselben für die Abscisse $x = l$ dieses Punktes den Werth:

$$21) \quad l = \frac{1}{2a} \lg \left\{ 1 + \frac{a v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \right\}.$$

Die zugehörigen Werthe von y und t erhält man aus den Gleichungen 16) und 18), indem man darin $x = l$ setzt.

Bei den oben angenommenen Zahlenwerthen: $a = 0,000\,98$, $v_0 = 400^m$, $\alpha = 3° 47',5$ ergiebt sich für den Horizontalabstand des Scheitelpunktes vom Anfangspunkte aus dieser letzteren Gleichung der Werth $l = 579^m,15$; ferner für die Höhe des Scheitelpunktes über dem Anfangspunkte aus Gleichung 16) der Werth: $y = 22^m,7$ und für die Zeit, nach welcher der geworfene Körper den Scheitelpunkt der Bahnlinie erreicht, aus Gleichung 18) der Werth: $t = 1,95$ Secunden.

§ 39.

Bewegung des materiellen Punktes unter Einwirkung einer dem Abstande von einem festen Punkte proportionalen Anziehungskraft. (Elliptische Schwingungen.)

Auf dieselbe Weise wie in § 35 erhält man für die dem Abstande r entsprechende Grösse der Anziehungskraft die Gleichung:

$$K = \frac{Q}{a} r,$$

in welcher Q die Grösse der Anziehungskraft beim Abstande a bedeutet. Für die beiden Seitenbewegungen ergeben sich nach Fig. 83 die Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K\cos\theta}{m}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{K\sin\theta}{m}.$$

Hierin ist $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\sin\theta = \frac{y}{r}$ zu setzen, und für K der oben angegebene Werth zu substituiren; also ist:

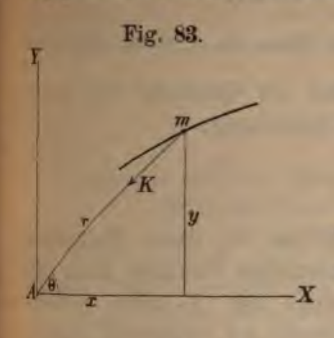


Fig. 83.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Q}{ma}x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Q}{ma}y,$$

und, wenn man — wie in § 35 — wieder abkürzungsweise:

$$\sqrt{\frac{Q}{ma}} = k$$

setzt, so nehmen diese beiden Gleichungen die Formen an:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, dass jede von den beiden Seitenbewegungen nach demselben Gesetze erfolgt, wie die in § 35 behandelte geradlinige Bewegung. Man erhält also für die Coordinaten des materiellen Punktes die Gleichungen:

$$x = A\sin kt + B\cos kt, \quad y = C\sin kt + D\cos kt,$$

und, indem man die Differenzial-Quotienten dieser beiden Ausdrücke bildet, für die beiden Seitengeschwindigkeiten die Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = Ak\cos kt - Bk\sin kt, \quad \frac{dy}{dt} = Ck\cos kt - Dk\sin kt,$$

in welchen die 4 Constanten A, B, C, D aus den gegebenen Anfangswerthen der beiden Coordinaten und der beiden Seitengeschwindigkeiten zu bestimmen sind.

Wenn mit x_0, y_0 die Coordinaten des Anfangspunktes, und mit c_x, c_y die beiden Seitengeschwindigkeiten der Anfangsgeschwindigkeit c bezeichnet werden, so ist:

$$x_0 = 0 + B, \quad y_0 = 0 + D, \quad c_x = Ak - 0, \quad c_y = Ck - 0,$$

und nach Substitution der hieraus für die 4 Constanten sich ergebenden Werthe nehmen die obigen Gleichungen die Formen an:

$$x = \frac{c_x}{k}\sin kt + x_0\cos kt, \quad y = \frac{c_y}{k}\sin kt + y_0\cos kt,$$

$$\frac{dx}{dt} = c_x\cos kt - x_0 k\sin kt, \quad \frac{dy}{dt} = c_y\cos kt - y_0 k\sin kt.$$

In dem speciellen Falle, wenn der Anfangspunkt in der Achse AY lag und die Anfangsgeschwindigkeit c parallel zur Achse AX

gerichtet war, ist $x_0 = 0$ und $c_y = 0$ zu setzen. In diesem Falle kann man den ersteren beiden Gleichungen die Formen geben:

$$x = a \sin kt, \quad y = b \cos kt,$$

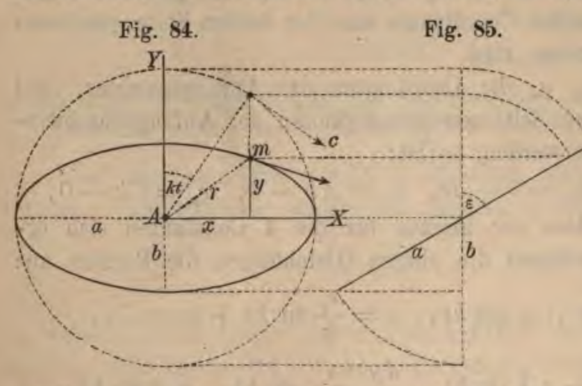
worin $a = \frac{c}{k}$ und $b = y_0$ ist. Wenn man die erstere durch a, die zweite durch b dividirt und alsdann die Quadrate der beiden Gleichungen addirt, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = +1,$$

welche zeigt, dass die Bahnlinie eine Ellipse ist, deren Halbachsen a und b sind. Die Bewegung des materiellen Punktes kann aufgefasst werden: wie wenn derselbe längs der X-Achse Schwingungen ausführte von der Schwingungsweite $2a$, während zugleich die X-Achse selbst in der Richtung der Y-Achse Schwingungen ausführt von der Schwingungsweite $2b$.

Wenn a die grössere der beiden Halbachsen ist, so kann das Verhältniss $\frac{b}{a} = \cos \varepsilon$ gesetzt werden. Denkt man sich einen Punkt längs der Peripherie eines Kreises vom Halbmesser a gleichförmig mit der Peripheriegeschwindigkeit c (oder mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{c}{a} = k$) sich bewegend, und die Bewegung projicirt auf eine Ebene, welche den Winkel ε mit der Kreis-Ebene einschliesst, so beschreibt die Projection des Punktes ebenfalls eine Ellipse, deren Halbachsen a, b sind, und zwar nach demselben Gesetze, welches oben für die Bewegung des materiellen Punktes gefunden wurde. Denn nach Fig. 84 und Fig. 85

Fig. 84. Fig. 85.



würde man für die beiden Coordinaten der Projection die Gleichungen erhalten:

$$x = a \sin kt, \quad y = a \cos kt \,.\, \cos \varepsilon,$$

welche mit den oben gefundenen übereinstimmen, da $a \cos \varepsilon = b$ ist. Von dem hier behandelten speciellen Falle unterscheidet sich der den ursprünglich gefundenen Gleichungen entsprechende allgemeinere Fall nur hinsichtlich der Lage des Achsen-Systems und des Anfangspunktes der Bewegung.

§ 40.

Bewegung des materiellen Punktes unter Einwirkung einer dem Abstande von einem festen Punkte proportionalen Abstossungskraft.

Wenn man in den Gleichungen des vorigen Paragraphen die Grösse $+K$ vertauscht mit der Grösse $-K$ (oder $+k^2$ mit $-k^2$), so gelten dieselben für den Fall, wo es statt der anziehenden eine abstossende Kraft ist, unter deren Einwirkung der materielle Punkt seine Bewegung ausführt. Es gelten also für diesen Fall die Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = +k^2x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = +k^2y,$$

welche zeigen, dass jede der beiden Seitenbewegungen nach demselben Gesetze erfolgt, welches in § 36 für die geradlinige Bewegung gefunden wurde. Für die beiden Coordinaten und die beiden Seitengeschwindigkeiten des materiellen Punktes erhält man wie in § 36 die allgemeinen Gleichungen:

$$x = Ae^{+kt} + Be^{-kt}, \quad y = Ce^{+kt} + De^{-kt},$$

$$\frac{dx}{dt} = Ake^{+kt} - Bke^{-kt}, \quad \frac{dy}{dt} = Cke^{+kt} - Dke^{-kt}.$$

Die 4 Constanten sind wie im vorigen Paragraphen aus den Anfangswerthen der Coordinaten und der Seitengeschwindigkeiten zu bestimmen mittelst der Gleichungen:

$$x_0 = A + B, \quad y_0 = C + D, \quad c_x = Ak - Bk, \quad c_y = Ck - Dk,$$

und man erhält nach Substitution der hieraus für die Coefficienten $A, B, C, D,$ zu entnehmenden Werthe die Gleichungen:

$$x = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{c_x}{k}\right)e^{+kt} + \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{c_x}{k}\right)e^{-kt},$$

$$y = \frac{1}{2}\left(y_0 + \frac{c_y}{k}\right)e^{+kt} + \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{c_y}{k}\right)e^{-kt}.$$

Für den speciellen Fall, in welchem $y_0 = 0$ und $c_x = 0$ ist, nehmen die beiden Gleichungen, wenn zugleich $x_0 = a$ und $\frac{c_y}{k} = \frac{c}{k} = b$ gesetzt wird, die einfacheren Formen an:

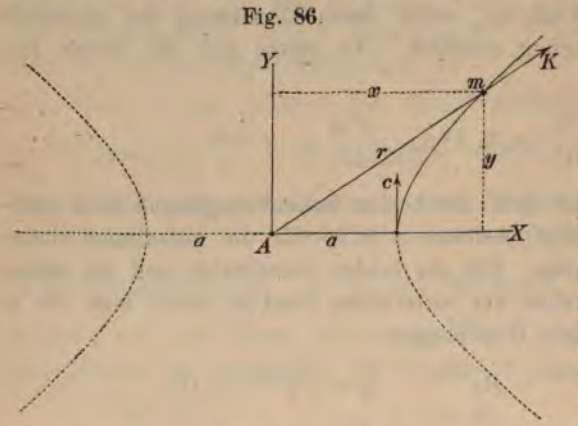
$$x = \frac{1}{2} a e^{+kt} + \frac{1}{2} a e^{-kt}, \quad y = \frac{1}{2} b e^{+kt} - \frac{1}{2} b e^{-kt}.$$

Wenn man die erstere durch a, die letztere durch b dividirt und alsdann die Quadrate derselben von einander subtrahirt, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = +1,$$

welche zeigt, dass die Bahnlinie in diesem Falle eine Hyperbel ist, deren Mittelpunkt der abstossende feste Punkt bildet und deren Hauptachse mit der X-Achse zusammenfällt (Fig. 86).

Fig. 86.



Auf diesen speciellen Fall lässt sich der den ursprünglich gefundenen Gleichungen entsprechende allgemeinere Fall durch Veränderung der Lage der Coordinaten-Achsen und des Anfangspunktes der Bewegung leicht zurückführen.

§ 41.

Bewegung des materiellen Punktes unter Einwirkung einer dem umgekehrten Quadrate des Abstandes von einem festen Punkte proportionalen Anziehungskraft.

Für die beiden Seitenbeschleunigungen erhält man nach Fig. 87 (auf dieselbe Weise wie in § 39 nach Fig. 83) zunächst wieder die beiden Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K \cos\theta}{m}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{K \sin\theta}{m}.$$

Wenn mit Q die Grösse bezeichnet wird, welche die Anziehungskraft K beim Abstande $\rho = l$ annimmt, so ist:

$$\frac{K}{Q} = \frac{l^2}{\rho^2}$$

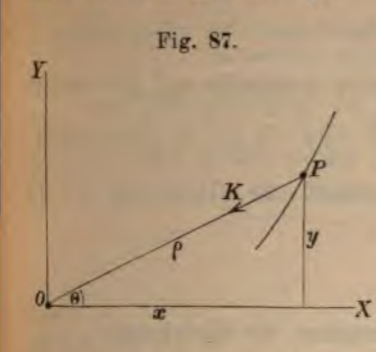


Fig. 87.

oder, wenn abkürzungsweise $\frac{Ql^2}{m} = \mu$ gesetzt wird:

$$\frac{K}{m} = \frac{\mu}{\rho^2}.$$

Die constante Grösse μ ist also derjenige Werth, welchen der Quotient $\frac{K}{m}$ annimmt, wenn $\rho = 1$ wird, oder die Beschleunigung, welche der materielle Punkt beim Abstande Eins vom Anziehungscentrum erhalten würde.

Wenn man den obigen Werth für $\frac{K}{m}$ und ausserdem die aus Fig. 87 zu entnehmenden Werthe $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$, $\sin\theta = \frac{y}{\rho}$ substituirt, so nehmen die Gleichungen für die beiden Seitenbeschleunigungen die Formen an:

$$1)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{\rho^3}, \qquad 2)\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{\rho^3}.$$

Um diese Gleichungen zu integriren, hat man die erstere mit y, die letztere mit x zu multipliciren und die erstere von der letzteren zu subtrahiren. Man erhält dann die Gleichung:

$$3)\quad x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

als deren Integral die Gleichung sich ergiebt:

$$4)\quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c,$$

worin c eine aus den Anfangswerthen zu bestimmende Constante bedeutet.

Eine andere Gleichung kann man aus den beiden Gleichungen 1) und 2) ableiten, indem man die erstere mit $2dx$, die letztere mit $2dy$ multiplicirt und dieselben addirt; man erhält dann die Gleichung:

$$5)\quad 2dx\frac{d^2x}{dt^2} + 2dy\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2\mu}{\rho^3}\left(xdx + ydy\right).$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist der Differenzialquotient des Geschwindigkeitsquadrates:

$$6)\quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = v^2,$$

und die Bedeutung des eingeklammerten Ausdrucks auf der rechteu Seite ergiebt sich aus der Gleichung:

$$7)\quad \rho^2 = x^2 + y^2, \text{ oder: } \rho d\rho = x dx + y dy.$$

Nach Substitution dieser Werthe nimmt die Gleichung 5) die Form an:

$$8)\quad d(v^2) = -2\mu \frac{d\rho}{\rho^2},$$

und man erhält durch Integration derselben die Gleichung:

$$9)\quad v^2 + k = \frac{2\mu}{\rho},$$

in welcher k wiederum eine aus den gegebenen Anfangswerthen zu bestimmende Constante bedeutet.

Wenn man in den Gleichungen 4) und 9) die Werthe $x = \rho \cos\theta$ und $y = \rho \sin\theta$ substituirt, so nehmen dieselben die Formen an:

$$10)\quad \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = c, \qquad 11)\quad \left(\rho \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = \frac{2\mu}{\rho} - k,$$

aus welchen man durch Elimination der Grösse dt die Gleichung ableitet:

$$12)\quad d\theta = \frac{c\, d\rho}{\rho\sqrt{2\mu\rho - c^2 - k\rho^2}}.$$

Durch Integration derselben erhält man als Polargleichung der Bahnlinie:

$$13)\quad \theta = \arccos\left(\frac{\frac{c^2}{\rho} - \mu}{\sqrt{\mu^2 - kc^2}}\right) + \alpha, \quad \text{oder:}$$

$$14)\quad \rho = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 - k\frac{c^2}{\mu^2}} \cdot \cos(\theta - \alpha)},$$

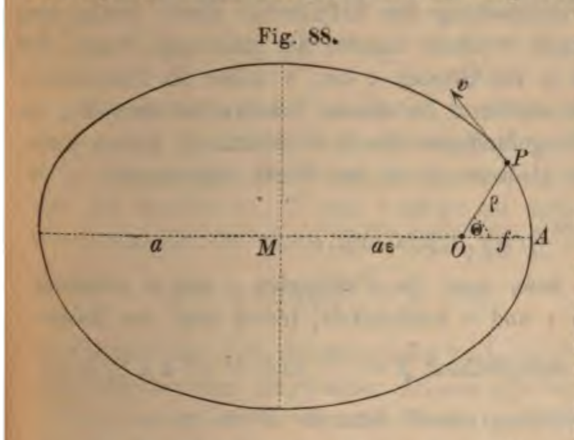
worin α wiederum eine aus den gegebenen Anfangswerthen zu bestimmende Constante bedeutet.

§ 42.

Anwendung der im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichungen auf den Fall, in welchem die Bahnlinie eine Ellipse wird.

Die Polargleichung der Ellipse (Fig. 88) in Bezug auf den Brennpunkt O als Pol und die Richtung OA der grossen Achse als Anfangsrichtung hat die Form:

Fig. 88.



15) $$\rho = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\theta}.$$

In dieser Gleichung bedeutet $\varepsilon = \frac{MO}{MA}$ das Verhältniss der Excentricität zur halben grossen Achse, also eine Grösse, welche stets kleiner ist als Eins.

Genau dieselbe Form würde die Gleichung 14) des vorigen Paragraphen annehmen, wenn in derselben:

$$\alpha = 0, \qquad \sqrt{1 - k\frac{c^2}{\mu^2}} = \varepsilon, \qquad \frac{\mu}{k} = a$$

gesetzt würde. Die Zulässigkeit der ersteren Substitution ist stets zu erreichen durch Wahl der entsprechenden Anfangsrichtung, von welcher aus der Winkel θ gemessen werden soll. Es ergiebt sich hieraus, dass die Bahnlinie eines materiellen Punktes eine Ellipse wird, deren einen Brennpunkt das Anziehungscentrum bildet, sobald die Bedingung erfüllt ist:

16) $$\sqrt{1 - k\frac{c^2}{\mu^2}} < 1, \quad \text{oder:} \quad k > 0.$$

Die Bedeutung der Grösse k ergiebt sich aus Gleichung 9) (des vorigen Paragraphen), nach welcher k der constante Werth ist, welchen die Grösse $\frac{2\mu}{\rho} - v^2$ stets beibehält. Wenn also mit ρ_0 die anfängliche Grösse des Radiusvectors und mit v_0 die Anfangsgeschwindigkeit bezeichnet wird, so ist:

$$17)\quad k = \frac{2\mu}{\rho} - v^2 = \frac{2\mu}{\rho_0} - v_0^2.$$

Der Bedingung, welche erfüllt sein muss, damit die Bahnlinie eine Ellipse werde, kann man daher auch die Form geben;

$$18)\quad v_0 < \sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0}}.$$

Es soll unter Vorausetzung des Erfülltseins dieser Bedingung untersucht werden, nach welchem Gesetze der materielle Punkt die Ellipse durchläuft, d. h. die Grössen ρ und θ sollen als Funktionen der Zeit t dargestellt werden. Zu diesem Zwecke hat man den in Gleichung 12) für $d\theta$ gefundenen Werth in Gleichung 10) zu substituiren, aus welcher alsdann für dt der Werth sich ergiebt:

$$19)\quad dt = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{2\mu\rho - c^2 - k\rho^2}}.$$

In dieser Gleichung kann man die Constanten c und k wiederum durch die Constanten ε und a ausdrücken, indem man den Bedeutungen der letzteren entsprechend $k = \frac{\mu}{a}$ und $c^2 = a\mu(1 - \varepsilon^2)$ setzt. Die obige Gleichung nimmt dann die Form an:

$$20)\quad dt = \sqrt{\frac{a}{\mu}} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2\varepsilon^2 - (a-\rho)^2}}.$$

Wenn man das Verhältniss $\frac{a-\rho}{a\varepsilon} = \cos\gamma$ setzt (was zulässig ist, da dieses Verhältniss eine veränderliche Grösse ist, welche zwischen den Grenzwerthen $+1$ und -1 variirt), so geht die obige Gleichung nach Einführung der dieser Substitution entsprechenden Werthe $\rho = a(1 - \varepsilon\cos\gamma)$ und $d\rho = a\varepsilon\sin\gamma d\gamma$ in die folgende über:

$$20)\quad dt = a\sqrt{\frac{a}{\mu}}(1 - \varepsilon\cos\gamma)\,d\gamma,$$

und man erhält durch Integration derselben die Gleichung:

$$22)\quad t = a\sqrt{\frac{a}{\mu}}(\gamma - \varepsilon\sin\gamma) + \text{Const.},$$

in welcher die Constante aus dem gegebenen Anfangswerthe von ρ zu bestimmen ist. Für $\gamma = 0$ wird $\cos\gamma = +1$ und $\rho = a(1-\varepsilon)$; für $\gamma = \pi$ wird $\cos\gamma = -1$ und $\rho = a(1+\varepsilon)$. Wenn also — wie oben vorausgesetzt wurde — der anfängliche Radiusvector $\rho_0 = a(1-\varepsilon)$ war, so wird $\gamma = 0$ für $t = 0$, folglich:

$$23)\quad t = a\sqrt{\frac{a}{\mu}}\,(\gamma - \varepsilon \sin\gamma).$$

Um diejenige Zeit t_1 zu finden, nach welcher die Grösse ρ aus dem Anfangswerth $\rho_0 = a(1-\varepsilon)$ in den Werth $\rho_1 = a(1+\varepsilon)$ übergeht, d. h. die Zeit, in welcher der materielle Punkt die erste Hälfte seiner elliptischen Bahn durchläuft, hat man die Werthe $t = t_1$ und $\gamma = \pi$ zu substituiren und erhält die Gleichung:

$$24)\quad t_1 = a\sqrt{\frac{a}{\mu}}\,\pi.$$

Um diejenige Zeit T zu finden, in welcher der materielle Punkt einen ganzen Umlauf ausführt, oder die Zeit, nach welcher der Radiusvector zum zweiten Male den Anfangswerth $a(1-\varepsilon)$ annimmt, hat man die Werthe $t = T$ und $\gamma = 2\pi$ zu substituiren. Es ergiebt sich daraus für die ganze Umlaufszeit der Werth:

$$25)\quad T = 2a\sqrt{\frac{a}{\mu}}\,\pi = 2t_1.$$

Denkt man sich einen anderen materiellen Pnnkt um dasselbe Anziehungscentrum längs einer Ellipse sich bewegend, deren halbe grosse Achse a_1 ist, so wird die Umlaufszeit desselben zu bestimmen sein aus der Gleichung:

$$26)\quad T_1 = 2a_1\sqrt{\frac{a_1}{\mu}}\,\pi,$$

und aus der Verbindung der beiden letzteren Gleichungen ergiebt sich die folgende:

$$27)\quad \frac{T_1^2}{T^2} = \frac{a_1^3}{a^3}.$$

Es verhalten sich also die Quadrate der Umlaufszeiten wie die dritten Potenzen der halben grossen Achsen der Bahnen. (Drittes Keplersches Gesetz).

Die Kreislinie kann betrachtet werden als eine Ellipse, deren Excentricität gleich Null ist. Der Bedingung $\varepsilon = 0$ entspricht der Werth $k = \frac{\mu^2}{c^2}$ oder die Bedingungsgleichung:

$$28)\quad \frac{2\mu}{\rho_0} - v_0^2 = \frac{\mu}{a}.$$

Da bei der Kreislinie der Radiusvector unveränderlich dieselbe Grösse beibehält, so ist zugleich $a = \rho_0$ zu setzen, und es ergiebt sich für die Anfangsgeschwindigkeit die Bedingungsgleichung:

$$29)\quad v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}.$$

Nach Gleichung 17) ist v constant, sobald ρ constant ist; es wird also der materielle Punkt die Kreislinie in gleichförmiger Bewegung durchlaufen.

Für den Fall, dass z. B. der Erdmittelpunkt das Anziehungscentrum bildet, würde man die Constante $\mu = \frac{Q l^2}{m}$ bestimmen können, indem man für l den Erdhalbmesser r und für Q das Gewicht mg des materiellen Punktes substituirt, als aus der Gleichung:

$$30)\quad \mu = \frac{mg \cdot r^2}{m} = g r^2.$$

Wenn man ausserdem $\rho_0 = r$ setzt, so ergiebt sich aus Gleichung 29) für v_0 der Werth:

$$31)\quad v_0 = \sqrt{g \cdot r} = \sqrt{9{,}8 \cdot 6370000} = 7900^{\mathrm{m}}.$$

Diese Geschwindigkeit müsste in der Richtung parallel zur Erdoberfläche einem materiellen Punkte als Anfangsgeschwindigkeit ertheilt werden, wenn derselbe unter Einwirkung der Schwerkraft beständig in gleicher Höhe über dem Boden schwebend in gleichförmiger Bewegung die Erde umkreisen soll. Die Umlaufszeit würde $T = 2 \cdot 2532 = 5064$ Secunden sein, und die Bewegung der Projection des Punktes auf dem Erddurchmesser würde mit der in § 35 untersuchten Bewegung genau übereinstimmen.

Wenn der Mond um den Erdmittelpunkt in einer kreisförmigen Bahnlinie sich bewegte, deren Halbmesser $= 60 \cdot r$ ist — was nur annäherungsweise der Fall ist — so würde man die Umlaufszeit des Mondes berechnen können aus der Gleichung:

$$\frac{T_1^2}{5064^2} = \frac{(60 \cdot r)^3}{r^3}, \quad \text{oder:} \quad T_1 = 5064 \sqrt{60^3} = 2354000 \text{ Secunden},$$

während der genauere Werth der Umlaufszeit gleich 2360591 Secunden ist.

Die Sonne bildet das gemeinsame Anziehungscentrum für die Planetenbewegungen. Es müssen daher nach Gleichung 27) die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten sich verhalten wie die dritten Potenzen der halben grossen Achsen der Bahnen. Da die Bahnachse des Planeten Neptun etwa 30-mal so gross ist als die der Erde, so ergiebt sich für denselben die Umlaufszeit:

$$T_1 = \sqrt{30^3} = 164 \text{ Jahre}.$$

Nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition bedeutet die Constante μ die Beschleunigung im Abstande Eins vom Anziehungscentrum, also nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze eine Grösse, welche der **Masse** des anziehenden Centralkörpers proportional ist. Hiernach hat das Verhältniss der Werthe μ_1 und μ_2, welche die Constante resp. in Bezug auf zwei verschiedene Centralkörper von den Massen M_1 und M_2 annimmt, die Grösse:

$$32)\quad \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{M_1}{M_2}$$

Mit Benutzung des aus Gleichung 25) zu entnehmenden Ausdrucks:

$$33)\quad \mu = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$$

erhält man hieraus für das Massenverhältniss der beiden Centralkörper den Werth:

$$34)\quad \frac{M_1}{M_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2.$$

Wenn hierin die mit dem Index „Eins" bezeichneten Grössen auf die Bewegung der Erde um die Sonne, und die mit dem Index „Zwei" bezeichneten Grössen auf die Bewegung des Mondes um die Erde bezogen werden, so kann annäherungsweise $\frac{a_1}{a_2} = 382$, und $\frac{T_1}{T_2} = 13{,}4$ gesetzt werden; also ist das Verhältniss:

$$\frac{\text{Sonnenmasse}}{\text{Erdmasse}} = \frac{382^3}{13{,}4^2} = 310000.$$

§ 43.

Anwendung auf den Fall, in welchem die Bahnlinie eine Hyperbel wird.

Die Polargleichung der Hyperbel (Fig. 89) in Bezug auf den Brennpunkt O als Pol und in Bezug auf die Hauptachse als Anfangsrichtung hat die Form:

$$35)\quad \rho = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon \cos\theta}.$$

In dieser Gleichung bedeutet wieder $a = AM$ die halbe Hauptachse, und $\varepsilon = \frac{OM}{AM}$ das Verhältniss der Excentricität zur halben Hauptachse. Diese Verhältnisszahl ist bei der Hyperbel stets grösser als Eins.

Genau dieselbe Form würde die Gleichung 14) (des § 41) annehmen, wenn in derselben:

$$\alpha = 0, \quad \sqrt{1 - k\frac{c^2}{\mu^2}} = \varepsilon \quad \text{und} \quad -\frac{\mu}{k} = a$$

gesetzt würde. Es regiebt sich daraus, dass die Bahnlinie des mate-

riellen Punktes eine Hyperbel wird, deren Brennpunkt das Anziehungscentrum bildet, sobald die Bedingung erfüllt ist:

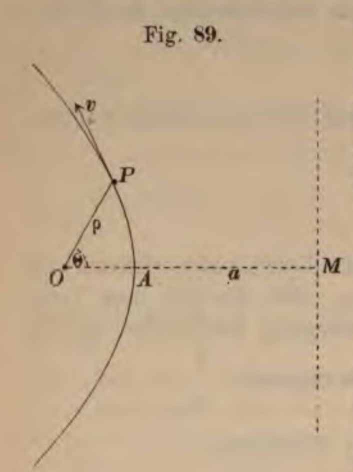


Fig. 89.

$$36)\quad \sqrt{1-k\frac{c^2}{\mu^2}} > 1, \text{ oder: } k < 0.$$

Diese Bedingung nimmt nach Substitution des für k aus Gleichung 17) (des § 42) zu entnehmenden Werthes die Form an:

$$37)\quad \frac{2\mu}{\rho_0} - v_0^2 < 0, \quad \text{oder:}$$

$$v_0 > \sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0}}.$$

Die Vergleichung der beiden Bedingungen 18) und 34) zeigt, dass es bei gegebener Anfangslage des materiellen Punktes lediglich von der Grösse der Anfangsgeschwindigkeit v_0 abhängt, ob die Bahnlinie eine Ellipse oder eine Hyperbel wird; während die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit durchaus keinen Einfluss darauf hat. Die Bahnlinie wird stets eine Ellipse bilden, wenn v_0 kleiner ist als $\sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0}}$, und stets eine Hyperbel, wenn v_0 grösser ist als $\sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0}}$.

Für die Erde als Anziehungscentrum ist nach Gleichung 30) die Constante $\mu = gr^2$ zu setzen, und wenn zugleich $\rho_0 = r$ ist, so wird:

$$35)\quad \sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0}} = \sqrt{2gr} = \sqrt{2 \,.\, 9{,}8 \,.\, 6370000} = 11180^{\text{m}}.$$

Denkt man sich einen Körper von irgend einem Punkte der Erdoberfläche aus nach aussen geworfen, so wird die Bahnlinie eine Hyperbel werden, wenn die dem Körper ertheilte Anfangsgeschwindigkeit grösser war als 11180^{m} pro Secunde, eine Ellipse dagegen, wenn dieselbe kleiner war als 11180^{m} — wie auch immer die Richtung dieser Anfangsgeschwindigkeit gewählt werden möge (vergl. § 31).

Es bleibt noch übrig, die Form der Bahnlinie zu bestimmen für denjenigen Fall, in welchem die Anfangsgeschwindigkeit v_0 weder grösser noch kleiner als $\sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0}}$, sondern vielmehr diesem

Grenzwerthe selbst gleich war. Diesem Grenzfalle entsprechen die Werthe:

$$k = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon = 1.$$

Es ist also die Form derjenigen Curve aufzusuchen, in welche die Ellipse oder Hyperbel übergeht, wenn das Verhältniss der Excentricität zur halben grossen Achse gleich Eins wird. Nach Fig. 88 ist:

$$\varepsilon = \frac{a - f}{a} = 1 - \frac{f}{a}, \quad \text{folglich:} \quad a(1 - \varepsilon^2) = 2f\left(1 - \frac{f}{2a}\right).$$

Letztere Gleichung nimmt, wenn darin $a = \infty$ und $\varepsilon = 1$ gesetzt wird, die Form an:

$$a(1 - \varepsilon^2) = \infty \,.\, 0 = 2f.$$

Fig. 90.

Es ist also $2f$ der Grenzwerth, welchem die Grösse $a(1 - \varepsilon^2)$ um so mehr sich annähert, jemehr die Grösse ε dem Grenzwerthe 1 sich nähert. Setzt man $4f = p$, so geht die Gleichung 15) nach Substitution der obigen Werthe in die folgende über:

$$36) \quad \rho = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \cos\theta},$$

welche die Polargleichung einer Parabel vom Parameter p ist in Bezug auf den Brennpunkt als Pol und die Achse als Anfangsrichtung (Fig. 90).

Wenn also die Grösse v_0 jenen Grenzübergangswerth $\sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0}}$ selbst annimmt, so wird die Bahnlinie des materiellen Punktes eine Parabel, deren Brennpunkt das Anziehungscentrum bildet.

Die Resultate dieser Untersuchungen können in folgendem Schema übersichtlich zusammengefasst werden. Die Bahnlinie wird:

eine Kreislinie, wenn $v_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$ ist,

„ Ellipse, „ $v_0 < \sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0}}$ „

„ Parabel, „ $v_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0}}$ „

eine Hyperbel, wenn $v_0 > \sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0}}$ ist.

Die der Parabel entsprechende Anfangsgeschwindigkeit ist demnach $\sqrt{2}$ mal so gross als die der Kreislinie entsprechende.

Die Erde bewegt sich um die Sonne in einer nahezu kreisförmigen Bahnlinie, deren Halbmesser ungefähr 20000000 geographische Meilen beträgt mit einer Geschwindigkeit von etwa 4 Meilen pro Secunde. Wenn durch irgend welche Ursachen die Geschwindigkeit derselben plötzlich bis auf die Grösse:

$$4 \,.\, \sqrt{2} = 5{,}656 \text{ Meilen pro Secunde}$$

erhöht würde, so ginge die Bahnlinie in eine Parabel über, und der Abstand der Erde von der Sonne würde fortan bis ins Unendliche zunehmen.

Wäre von irgend einem anderen Körper (z. B. einem Meteoriten oder einem Kometen) in dem Augenblicke, wo derselbe 20000000 Meilen von der Sonne entfernt ist, die Geschwindigkeit durch Beobachtungen bestimmt worden, so würde man an der Grösse dieser Geschwindigkeit erkennen können, ob der Körper dem Sonnen-Systeme angehört oder nicht. Die Bahnlinie würde eine geschlossene (elliptische) oder nicht geschlossene (hyperbolische) Curve sein, je nachdem die beobachtete Geschwindigkeit kleiner oder grösser war als 5,656 Meilen pro Secunde.

§ 44.

Hodograph der Kometenbewegung.

Wenn man in § 41 die Gleichung 1) mit der Gleichung 4) multiplicirt, so erhält man die Gleichung:

$$1)\quad c\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{\rho^3}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$

welche man zum Zwecke der Integration in folgender Weise umformen kann:

$$2)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{c\rho^3}\left\{(x^2+y^2)\frac{dy}{dt} - y\left(\frac{x\,dx}{dt} + \frac{y\,dy}{dt}\right)\right\},$$

$$3)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{c\rho^3}\left(\rho^2\cdot\frac{dy}{dt} - y\cdot\frac{\rho\,d\rho}{dt}\right),$$

$$4)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{c}\left(\frac{\rho\cdot\frac{dy}{dt} - y\cdot\frac{d\rho}{dt}}{\rho^2}\right),$$

$$5)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{c}\cdot\frac{d\left(\frac{y}{\rho}\right)}{dt}.$$

Durch Ausführung der Integration erhält man alsdann die Gleichung:

$$6)\quad \frac{dx}{dt} = -\frac{\mu}{c} \cdot \frac{y}{\rho} + \text{Const.}$$

Wenn man $\frac{dx}{dt} = \xi$ und $\frac{\mu}{c} = r$ setzt, so kann man dieser Gleichung, indem man die Integrationsconstante mit A bezeichnet, auch die folgende Form geben:

$$7)\quad \xi - A = -\frac{ry}{\rho}.$$

Indem man die Gleichung 2) des § 41 auf dieselbe Weise behandelt, gelangt man zu de folgenden Gleichungen:

$$8)\quad c\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{\rho^3}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$

$$9)\quad \frac{d^2y}{dt^2} = +\frac{\mu y}{c\rho^3}\left\{(y^2 + x^2)\frac{dx}{dt} - x\left(\frac{xdx}{dt} + \frac{ydy}{dt}\right)\right\},$$

$$10)\quad \frac{d^2y}{dt^2} = +\frac{\mu}{c\rho^3}\left(\rho^2\frac{dx}{dt} - x\frac{\rho d\rho}{dt}\right),$$

$$11)\quad \frac{d^2y}{dt^2} = +\frac{\mu}{c}\left(\frac{\rho\frac{dx}{dt} - x\frac{d\rho}{dt}}{\rho^2}\right),$$

$$12)\quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\mu}{c} \cdot \frac{d\left(\frac{x}{\rho}\right)}{dt},$$

$$13)\quad \frac{dy}{dt} = \frac{\mu}{c} \cdot \frac{x}{\rho} + \text{Const.}$$

Wenn man $\frac{dy}{dt} = \eta$ setzt, und die Integrationsconstante mit B bezeichnet, so kann man dieser letzteren Gleichung auch die folgende Form geben:

$$14)\quad \eta - B = \frac{rx}{\rho}.$$

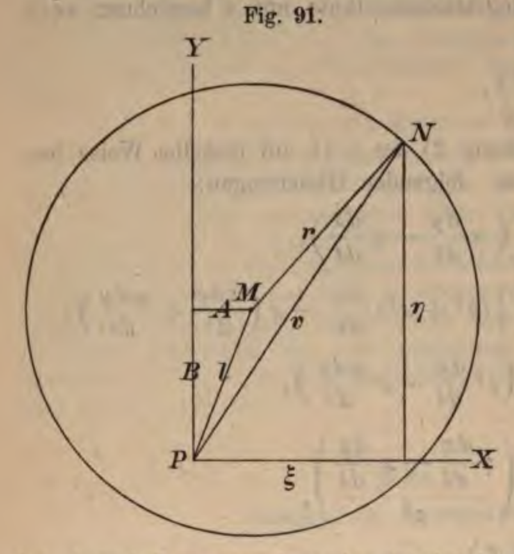
In den obigen Gleichungen bedeuten ξ und η die beiden Seitengeschwindigkeiten von v, oder die Coordinaten des dem Zeitwerthe t entsprechenden Punktes der Hodographen-Curve, welche man erhält, indem man von einem beliebigen als Pol gewählten festen Punkt P aus die Werthe von $v = PN$ nach Grösse und Richtung abträgt (vgl. § 8).

Wenn man die Quadrate der Gleichungen 7) und 14) addirt, erhält man die Gleichung:

$$15)\quad (\xi - A)^2 + (\eta - B)^2 = r^2,$$

welche zeigt, dass der Hodograph eine Kreislinie vom Halbmesser $r = \frac{\mu}{c}$ ist, deren Mittelpunktscoordinaten A und B sind (Fig. 91). Der Abstand des Mittelpunktes vom Pole des Hodographen hat die Grösse: $\overline{PM} =$

Fig. 91.



$$16)\quad l = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Wenn mit dem Index „Null" die Anfangswerthe der veränderlichen Grössen bezeichnet werden, so ist nach Gleichung 7) und 14):

$$17)\quad \xi_0 - A = -\frac{r y_0}{\rho_0}$$

$$18)\quad \eta_0 - B = \frac{r x_0}{\rho_0}$$

Nach Substitution der aus diesen Gleichungen resp. für A und B zu entnehmenden Ausdrücke erhält man (mit Berücksichtigung der den Constanten r und c beigelegten Bedeutungen) für jenen Abstand l den Werth:

$$19)\quad l = \sqrt{(\xi_0^2 + \eta_0^2) + r^2 - \frac{2\mu}{c\rho_0}(\eta_0 x_0 - \xi_0 y_0)},\ \text{oder:}$$

$$20)\quad l = \sqrt{v_0^2 + r^2 - \frac{2\mu}{\rho_0}}.$$

Die letztere Gleichung zeigt, dass der Abstand l grösser oder kleiner als der Halbmesser r ist, je nachdem die Anfangsgeschwindigkeit v_0 grösser oder kleiner als $\sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0}}$ ist, d. h. (nach § 43), jenachdem die Bahnlinie des Kometen eine Hyperbel oder eine Ellipse ist. Der Pol liegt also ausserhalb der Kreislinie, wenn die Bahnlinie eine Hyperbel ist, und innerhalb derselben, wenn die Bahnlinie eine Ellipse ist. Der Werth $v_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0}}$ entspricht (nach § 43) dem Falle, in welchem die Bahnlinie eine Parabel ist, und in diesem Falle liegt der Pol in der Peripherie des Kreises.

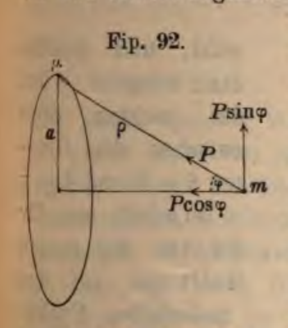
§ 45.

Berechnung der von einer homogenen Kugel auf einen ausserhalb oder innerhalb derselben befindlichen materiellen Punkt ausgeübten Anziehungskraft.

Bei den Anwendungen der in den letzten Paragraphen gefundenen Gleichungen — ebenso auch bei den im Anfange des vorigen Capitels behandelten Fällen — wurde angenommen, dass die Anziehungskraft der Erde, der Sonne oder irgend eines anderen kugelförmigen Weltkörpers auf einen ausserhalb desselben befindlichen materiellen Punkt so wirkt, wie wenn die anziehende Masse im Mittelpunkte der Kugel concentrirt wäre. Dass diese Annahme zulässig ist, sobald die anziehende Kugel aus homogenen concentrischen Schichten zusammengesetzt ist, soll in diesem Paragraphen nachgewiesen werden.

Ein homogener Ring von unendlich kleinem Querschnitte kann betrachtet werden als eine Masse, welche längs einer Kreislinie stetig und gleichförmig vertheilt ist. Die von einem solchen Ringe auf einen in der Achse desselben befindlichen materiellen Punkt ausgeübte Anziehungskraft dK setzt sich als Mittelkraft zusammen aus den Anziehungskräften, welche von den einzelnen Theilen des Ringes auf den materiellen Punkt übertragen werden. Die Richtungslinien aller dieser Anziehungskräfte liegen in einer Kegelfläche, deren Scheitelpunkt der angezogene materielle Punkt bildet. Wenn mit P die Grösse einer von diesen Kräften, z. B. der von dem Massentheilchen μ ausgeübten Anziehungskraft bezeichnet wird, so ist $P \cos \varphi$ der Beitrag, welchen dieselbe zu der in die Achsenrichtung fallenden Mittelkraft liefert. Die von dem ganzen Ringe auf den materiellen Punkt übertragene Anziehungskraft ist gleich der Summe aller dieser Beiträge; also ist:

Fip. 92.



$$dK = \Sigma (P \cos \varphi) = \cos \varphi \, \Sigma (P).$$

Für die Kraft P ergiebt sich nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze (§ 31) der Werth:

$$P = k \frac{\mu \, . \, m}{\rho^2},$$

und man erhält nach Substitution desselben die Gleichung:

$$dK = \cos\varphi\, \Sigma \left(k \frac{\mu \,.\, m}{\rho^2}\right) = \frac{km \cos\varphi}{\rho^2}\, \Sigma\,(\mu),$$

in welcher der Ausdruck $\Sigma\,(\mu)$ die Masse des Ringes bedeutet. Wenn mit a der Halbmesser, mit f der unendlich kleine Querschnitt des Ringes und mit γ die Dichtigkeit seiner Masse (d. h. die in der Cubikeinheit enthaltene Masse) bezeichnet wird, so ist die ganze Masse des Ringes:

$$\Sigma\,(\mu) = 2 a \pi f \gamma,$$

und nach Substitution dieses Werthes nimmt die obige Gleichung die Form an:

$$dK = 2\pi\gamma k m \frac{a f \cos\varphi}{\rho^2}.$$

Man kann den Ring Fig. 92 als Theil der Hohlkugel Fig. 93 betrachten, deren Wandstärke Δ unendlich klein vorausgesetzt wird. Nach der in Fig. 93 gewählten Bezeichnung ist alsdann der Ringquerschnitt $f = \Delta \,.\, r d\theta$, der Ringhalbmesser $a = r \sin\theta$ zu setzen, und es wird:

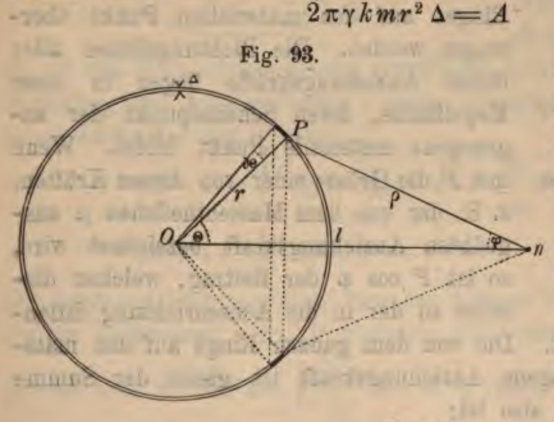
$$dK = 2\pi\gamma k m r^2 \Delta \frac{\cos\varphi \sin\theta\, d\theta}{\rho^2}.$$

Wenn man in dieser Gleichung abkürzungsweise den constanten Factor:

$$2\pi\gamma k m r^2 \Delta = A$$

setzt, und dieselbe dann integrirt — auf der rechten Seite zwischen den Grenzen $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ — so erhält man für die von der ganzen Hohlkugel auf den materiellen Punkt übertragene Anziehungskraft die Gleichung:

Fig. 93.



$$K = A \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \frac{\cos\varphi \sin\theta\, d\theta}{\rho^2}.$$

Die Grössen φ und θ kann man als Functionen von ρ darstellen, indem man in dem Dreieck OPm das eine Mal die Seite OP, das andere Mal die Seite Pm ausdrückt durch die zwei anderen Seiten

und den gegenüberliegenden Winkel. Man gelangt dabei zu den folgenden Gleichungen:

$$r^2 = \rho^2 + l^2 - 2\rho l \cos\varphi, \quad \text{oder:} \quad \cos\varphi = \frac{\rho^2 + l^2 - r^2}{2\rho l},$$

$$\rho^2 = r^2 + l^2 - 2rl\cos\theta,$$

$$2\rho d\rho = 2rl \sin\theta d\theta, \quad \text{oder:} \quad \sin\theta d\theta = \frac{\rho d\rho}{rl}.$$

Wenn man diese Werthe substituirt und zugleich berücksichtigt, dass den Grenzen $\theta = 0$ und $\theta = \pi$, resp. die Grenzwerthe $\rho = l - r$ und $\rho = l + r$ entsprechen, so erhält man für K die Gleichung:

$$K = \frac{A}{2rl^2}\int\limits_{l-r}^{l+r}\left(1 + \frac{l^2 - r^2}{\rho^2}\right) d\rho = \frac{2A}{l^2},$$

welcher nach Wiedereinsetzung des Werthes von A die Form annimmt:

$$K = k\,\frac{(4r^2\pi\Delta\gamma)m}{l^2}.$$

In dieser Gleichung bedeutet der eingeklammerte Ausdruck die Masse der Hohlkugel. Wenn also diese Masse mit M bezeichnet wird, so ergiebt sich für die Kraft K die Gleichung:

$$K = k\,\frac{Mm}{l^2},$$

also genau dieselbe Gleichung, welche man erhalten würde, wenn die ganze Masse der Hohlkugel in dem Mittelpunkte derselben concentrirt wäre. Es folgt hieraus, dass auch eine aus homogenen concentrischen Hohlkugeln zusammengesetzte Vollkugel auf einen ausserhalb derselben befindlichen materiellen Punkt m gerade so wirkt, wie wenn ihre Masse im Mittelpunkte concentrirt wäre. Dasselbe gilt von der Anziehungskraft, welche die Kugel ihrerseits erleidet. Denkt man sich den materiellen Punkt m einer zweiten ebenso zusammengesetzten Kugel als Massentheilchen angehörend, und berücksichtigt man, dass auf jedes der übrigen Massentheilchen die erste Kugel ebenfalls so einwirkt, wie wenn ihre Masse im Mittelpunkt concentrirt wäre, so erkennt man, dass auch die ganze Anziehungskraft, welche von der ersten Kugel auf die zweite übertragen wird, oder welche sie von Seiten derselben erleidet, genau so wirkt, wie wenn die ganze Masse der Kugel in dem Mittelpunkte derselben concentrirt wäre.

Für den Fall, dass der angezogene materielle Punkt nicht ausserhalb, sondern in dem inneren Raume der Hohlkugel sich befindet (Fig. 94), hat man die oben angedeutete Integration zwischen den Grenzen $\rho = r - l$ und $\rho = r + l$ auszuführen. Man erhält demnach für diesen Fall die Gleichung:

Fig. 94.

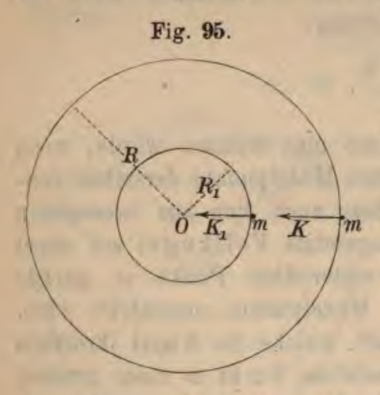


$$K = \frac{A}{2rl^2}\int\limits_{r-l}^{r+l}\left\{1 + \left(\frac{l^2 - r^2}{\rho^2}\right)\right\} d\rho = 0,$$

aus welcher sich ergiebt, dass die von den einzelnen Massentheilchen der Hohlkugel auf den im Inneren gelegenen materiellen Punkt ausgeübten Anziehungskräfte einander gegenseitig aufheben.

Eine aus homogenen concentrischen Hohlkugeln zusammengesetzte Vollkugel vom Halbmesser R wirkt daher auf einen im Inneren derselben im Abstande R_1 vom Mittelpunkte befindlichen materiellen Punkt gerade so, wie wenn nur die innere Kugel vom Halbmesser R_1 vorhanden wäre (Fig. 95). Wenn die ganze Kugel homogen wäre — d. h. wenn die Masse der ganzen Kugel in dem Raume derselben gleichförmig vertheilt wäre — so würde das Verhältniss der Masse M_1 der inneren Kugel zur Masse M der ganzen Kugel die Grösse haben:

Fig. 95.



$$\frac{M_1}{M} = \frac{R_1^3}{R^3},$$

und für die beiden Anziehungskräfte resp. K_1 und K, welche der materielle Punkt m erleiden würde, wenn derselbe das eine Mal im Abstande R_1, das andere Mal im Abstande R vom Mittelpunkte sich befände, würden sich die Gleichungen ergeben:

$$K_1 = k\frac{mM_1}{R_1^2}, \quad K = k\frac{mM}{R^2}, \quad \text{folglich:} \quad \frac{K_1}{K} = \frac{M_1}{M}\cdot\frac{R^2}{R_1^2} = \frac{R_1}{R}.$$

Wäre also die Erde eine solche homogene Kugel, so würde die Schwerkraft im Inneren des Erdkörpers — z. B. in einem bis

zum Mittelpunkte reichenden Schachte (vergl. § 35) — proportional dem Abstande vom Mittelpunkte sich ändern, während ausserhalb der Erde die Schwerkraft dem umgekehrten Quadrate des Abstandes vom Mittelpunkte proportional sich ändert (vergl. § 31).

§ 46.

Bewegung eines materiellen Punktes unter Einwirkung einer an Grösse unveränderlichen Kraft, deren Richtungslinie gleichförmig sich dreht.

Es soll angenommen werden, dass der materielle Punkt in dem Durchschnittspunkte A der beiden Coordinaten-Achsen seine Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit Null begann, und dass die Anfangsrichtung der Kraft K mit der Achse AY zusammenfiel (Fig. 96). Wenn ω die Winkelgeschwindigkeit ist, mit welcher die Richtungslinie der Kraft K in der Ebene AYX sich dreht, so wird nach Ablauf der Zeit t die Kraft K um den Winkel ωt von der Richtung der Achse AY abweichen, und es ergeben sich für die beiden Seitenbeschleunigungen des materiellen Punktes m zu dieser Zeit die Gleichungen:

Fig. 96.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{K \sin \omega t}{m}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{K \cos \omega t}{m}.$$

Durch Integration derselben erhält man — unter Berücksichtigung des Umstandes, dass jede der beiden Seitengeschwindigkeiten im Anfange Null war — die Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{K}{m\omega}(1 - \cos \omega t), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{K}{m\omega} \sin \omega t.$$

Durch nochmalige Integration erhält man für die Coordinaten des materiellen Punktes die allgemeinen Gleichungen:

$$x = \frac{K}{m\omega} t - \frac{K}{m\omega^2} \sin \omega t, \quad y = \frac{K}{m\omega^2}(1 - \cos \omega t),$$

und wenn man abkürzungsweise die constante Grösse $\frac{K}{m\omega^2} = r$ setzt, so nehmen diese Gleichungen die Formen an:

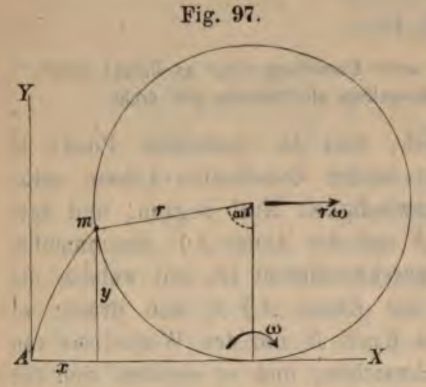
$$x = r\omega t - r \sin \omega t, \quad y = r(1 - \cos \omega t).$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe:

$$\omega t = 0, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad 4\pi,$$
$$x = 0, \quad r\pi, \quad 2r\pi, \quad 3r\pi, \quad 4r\pi,$$
$$y = 0, \quad 2r \quad 0, \quad 2r, \quad 0.$$

Genau zu denselben Gleichungen würde man auch gelangen, man bei einem mit der schwindigkeit $r\omega$ längs Achse AX rollenden K vom Halbmesser r die B gung bestimmte, welche Punkt der Peripherie dess ausführt (Fig. **97**). Die B linie des materiellen Punkt daher eine Cycloïde, derei zeugender Kreis den Halbm $r = \frac{K}{m\omega^2}$ hat.

Fig. 97.



Den Gleichungen fü beiden Seitengeschwindigkeiten kann man auch die Formen ge

$$\frac{dx}{dt} = r\omega\,(1 - \cos \omega t), \qquad \frac{dy}{dt} = r\omega \sin \omega t,$$

und es ergiebt sich daraus für die Resultirende dieser beiden schwindigkeiten der Werth:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = r\omega\sqrt{2\,(1 - \cos \omega t)} = 2r\omega \sin$$

Es wird also $v = 2r\omega$, wenn $\omega t = \pi$ ist,

$v = 0$ „ $\omega t = 2\pi$ „

$v = 2r\omega$ „ $\omega t = 3\pi$ „

$v = 0$ „ $\omega t = 4\pi$ „ u. s. w.

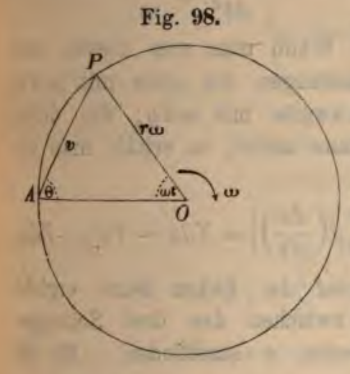
Die Geschwindigkeit v kann man durch die in Fig. **98** a gebene Construction ihrer Grösse und Richtung nach geomet darstellen, indem man sich den Radius $OP = r\omega$ von der hor talen Anfangslage OA aus gleichförmig mit der Winkelgeschwi keit ω um den festen Punkt O sich drehend denkt und in Augenblicke, wo derselbe den Winkel ωt beschrieben hat, den punkt P mit der Anfangslage derselben A durch die gerade $AP = v$ verbindet. Denn es ergeben sich aus dieser Constru die Gleichungen:

$$v \cos \theta = r\omega\,(1 - \cos \omega t) = \frac{dx}{dt},$$

$$v \sin \theta = r\omega \sin \omega t = \frac{dy}{dt}.$$

Wenn man also den Hodographen der Bewegung construirt — indem man die Geschwindigkeiten, welche der materielle Punkt in den aufeinander folgenden Zeitpunkten annimmt, sämmtlich ihrer Grösse und Richtung nach von einem festen Pole A aus abträgt — so ergiebt sich aus obiger Figur, dass die Endpunkte aller dieser Strecken in einer durch jenen Pol hindurchgehenden Kreislinie liegen, deren Halbmesser die Grösse $r\omega = \frac{K}{m\omega}$ hat, und deren Mittelpunkt in der Horizontalen des Poles liegt. Die Geschwindigkeit, mit welcher der Hodographenpunkt diese Kreislinie durchläuft, hat die Grösse: $r\omega^2 = \frac{K}{m}$ und bildet den Winkel ωt mit der Verticalen. Die Geschwindigkeit des Hodographenpunktes stellt also der Grösse und Richtung nach die Beschleunigung des materiellen Punktes Punktes dar (Vergl. § 8). Der Hodograph des Hodographen, oder der Hodograph zweiter Ordnung, bildet wiederum eine Kreislinie und zwar eine Kreislinie vom Halbmesser $r\omega^2$ mit dem Pole als Mittelpunkt. Der Hodograph dritter Ordnung ist eine Kreislinie vom Halbmesser $r\omega^3$ u. s. w. Wenn also $\omega = 1$ ist, so werden alle diese Hodographen Kreislinien vom Halbmesser r. (Vergl. § 8, Fig. 13 . . 16.)

Fig. 98.



Wenn die Anfangsgeschwindigkeit des materiellen Punktes nicht gleich Null, sondern gleich c war, so kann man die Bewegung so auffassen, als ob der ganze Raum, in Bezug auf welchen der materielle Punkt die hier beschriebene Bewegung als relative Bewegung ausführt, gleichzeitig in geradlinig und gleichförmig fortschreitender Bewegung begriffen wäre, deren Geschwindigkeit gleich der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit c ist.

§ 47.

Princip der lebendigen Kraft.

Denkt man sich die auf den materiellen Punkt m wirke Kraft K in ihre drei rechtwinkelig zu einander gerichteten Coordinaten-Achsen parallelen tenkräfte X, Y, Z zerlegt (Fig. so ergeben sich für die drei Sei beschleunigungen die allgeme Gleichungen:

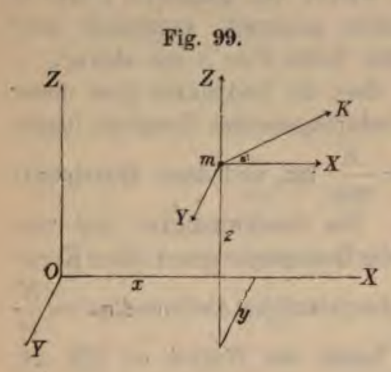


Fig. 99.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{m}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{m}.$$

Wenn man von diesen Gleichungen die erste mit m die zweite mit mdy, die d mit mdz multiplicirt und dieselben dann addirt, so erhält man Gleichung:

$$1) \; m\left\{\frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dz}{dt}d\left(\frac{dz}{dt}\right)\right\} = Xdx + Ydy + Z$$

Die Bedeutung des Ausdrucks auf der linken Seite erg sich aus den Beziehungen, welche zwischen den drei Seiter schwindigkeiten und ihrer Resultirenden v stattfinden. Es nämlich:

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \text{ folglich:}$$

$$d\,(v^2) = 2\left\{\frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dz}{dt}d\left(\frac{dz}{dt}\right)\right\}.$$

Man kann daher der obigen Gleichung auch die folgende F geben:

$$2) \quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Das Product $\frac{mv^2}{2}$ nennt man die **lebendige Kraft** des teriellen Punktes. Es ist daher $d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ die in der unend kleinen Zeit dt erfolgende Zunahme der lebendigen Kraft, und

Ausdruck $\int d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ würde die Summe der in sämmtlichen einzelnen Zeitelementen erfolgenden Zunahmen der lebendigen Kraft bedeuten. Wenn also mit v_0 die Anfangsgeschwindigkeit bezeichnet wird, so ergiebt sich für die ganze in der Zeit t erfolgende Zunahme der lebendigen Kraft die Gleichung:

$$3)\quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int (X dx + Y dy + Z dz).$$

Die unendlich kleinen Grössen dx, dy, dz können als Kanten eines Parallelepipedons bedrachtet werden, dessen Diagonale das Bahnelement ds bildet; folglich sind $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ resp. die Cosinus der Winkel, welche das Bahnelement ds mit den drei Coordinaten-Achsen bildet. In gleicher Weise sind $\frac{X}{K}$, $\frac{Y}{K}$, $\frac{Z}{K}$ resp. die Cosinus der Winkel, welche die Richtung der Kraft K mit den drei Achsen einschliesst. Wenn also mit φ der Winkel bezeichnet wird, welchen das Bahnelement ds mit der Richtung der Kraft einschliesst (Fig. 100), so ist:

Fig. 100.

$$4)\quad \cos\varphi = \frac{X}{K}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{K}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{K}\cdot\frac{dz}{ds}, \text{ oder:}$$

$$5)\quad K\,.\,ds \cos\varphi = X dx + Y dy + Z dz.$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist das Product aus der Kraft K in die Projection des Bahnelements auf die Richtung der Kraft. Die gleichen Bedeutungen haben die drei Glieder auf der rechten Seite in Bezug auf die drei Seitenkräfte der Kraft K. Man nennt das Product: „Kraft mal Weg in der Richtung der Kraft" die mechanische Arbeit der Kraft. Die Gleichung 5) drückt also aus, dass die von der Kraft K während des Zeitelements dt verrichtete mechanische Arbeit gleich ist der Summe der von ihren Seitenkräften während ebendesselben Zeittheilchens verrichteten mechanischen Arbeiten. Das Integral:

$$6)\quad \int (X dx + Y dy + Z dz) = \int K ds \cos\varphi$$

bedeutet die Summe der in sämmtlichen auf einander folgenden Zeitelementen verrichteten mechanischen Arbeiten. Die Gleichung

3) enthält daher den folgenden Satz: „Die Grösse, um welche die lebendige Kraft des materiellen Punktes in einem bestimmten Zeitraume zunimmt, ist gleich der mechanischen Arbeit, welche während dieser Zeit von den auf ihn einwirkenden Kräften — oder ihrer Mittelkraft — verrichtet wurde.“ Dieser Satz wird das „Princip der lebendigen Kraft“ genannt. Man kann diesen Satz benutzen, um die Geschwindigkeit v aus der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit v_0 zu berechnen, sobald es möglich ist, den Werth des in Gleichung 6) angegebenen Ausdrucks für die mechanische Arbeit zu bestimmen.

Wenn X, Y, Z constante Grössen sind, d. h. wenn während der Bewegung die Kraft K sowohl der Grösse als der Richtung nach unverändert bleibt, so erhält man die von derselben verrichtete mechanische Arbeit, indem man die Grösse K multiplicirt mit der ganzen in der Richtung derselben zurückgelegten Wegeslänge.

Wenn z. B. bei einem unter Einwirkung der Schwerkraft sich bewegenden geworfenen Körper der Anfangspunkt der Bahnlinie in der Höhe h über dem Endpunkte derselben liegt, so ist die Endgeschwindigkeit zu berechnen aus der Gleichung:

$$7) \quad \frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = m g h, \quad \text{oder:} \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2 g h}.$$

Die Endgeschwindigkeit eines aus unendlicher Höhe auf die Erdoberfläche herabfallenden Körpers ist nach § 31 zu berechnen aus der Gleichung:

$$8) \quad \frac{m v^2}{2} = m g r, \quad \text{oder:} \quad v = \sqrt{2 g r},$$

und die während des Fallens von der Schwerkraft verrichtete mechanische Arbeit hat die Grösse:

$$9) \quad \mathfrak{A} = m g r.$$

§ 48.

Kräfte-Functionen.

Im Allgemeinen werden die Kräfte X, Y, Z mit den Coordinaten des materiellen Punktes nach irgend welchen Gesetzen sich ändern. Es soll als specieller Fall angenommen werden, dass diese Aenderungsgesetze den Bedingungsgleichungen:

$$10) \quad X = \frac{dU}{dx}, \qquad Y = \frac{dU}{dy}, \qquad Z = \frac{dU}{dz}$$

entsprechen, d. h. es soll vorausgesetzt werden, dass es irgend eine veränderliche Grösse:

$$11) \quad U = f(x, y, z)$$

giebt, welche in solcher Weise mit den Coordinaten x, y, z sich ändert, dass die partiellen Differenzial-Quotienten dieser Grösse nach den drei Raum-Coordinaten genommen stets die Grössen jener drei Seitenkräfte darstellen für den betreffenden Punkt des Raumes. In diesem speciellen Falle nimmt das Integral in Gleichung 3) die Form an:

$$12)\quad \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int dU.$$

Die Grösse U ist als Function der Raum-Coordinaten eine veränderliche Grösse, welche für jeden Punkt des Raumes einen bestimmten Werth annimmt. Wenn also mit U_0 der dem Anfangspunkte, mit U_1 der dem Endpunkte der Bahnlinie entsprechende Werth bezeichnet wird, ferner mit v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, mit v_1 die Endgeschwindigkeit, so nimmt für diesen Fall die Gleichung der lebendigen Kraft die Form an:

$$13)\quad \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{U_0}^{U_1} dU = U_1 - U_0.$$

In dieser Gleichung bedeutet U_0 den bestimmten Werth, welchen man für die Grösse U aus Gleichung 11) erhalten würde, wenn man darin für die veränderlichen Coordinaten x, y, z die bestimmten Grössen x_0, y_0, z_0 als Coordinaten des Anfangspunktes substituirte. Ausser dieser einen Werthencombination der Grössen x, y, z giebt es indessen noch unendlich viele andere, welche ebenfalls diesen Werth für U liefern würden, d. h. es giebt im Raume unendlich viele Punkte, für welche $U = U_0$ wird, und den geometrischen Ort aller dieser Punkte bildet eine krumme Fläche, welche durch die Gleichung bestimmt ist:

$$14)\quad f(x, y, z) = U_0.$$

Auf gleiche Weise erhält man für die krumme Fläche, welche den geometrischen Ort aller derjenigen Punkte bildet, in denen $U = U_1$ wird, die Gleichung:

$$15)\quad f(x, y, z) = U_1.$$

Da die Zunahme der lebendigen Kraft gleich der Differenz der beiden Grössen U_0 und U_1 ist, so würde genau dieselbe Zunahme der lebendigen Kraft auch dann stattfinden, wenn statt des wirklichen Anfangspunktes irgend ein anderer Punkt der Fläche U_0 der Anfangspunkt gewesen wäre, und wenn statt des wirklichen

Endpunktes irgend ein anderer Punkt der Fläche U_1 den Endpunkt der Bahnlinie bildete.

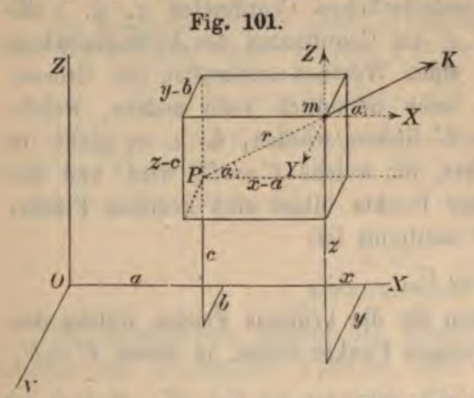
Wäre $U_1 = U_0$, so würde auch $v_1 = v_0$, d. h. die Geschwindigkeit wird wieder gleich der Anfangsgeschwindigkeit, sobald der materielle Punkt wieder zu der Fläche U_0 zurückkehrt, welcher der Anfangspunkt angehörte; und die Geschwindigkeit würde immer gleich v_0 bleiben, wenn der materielle Punkt bei seiner Bewegung fortwährend in der Fläche U_0 bliebe. Im letzteren Falle würde die Bewegung so erfolgen, dass die den Coordinaten-Aenderungen dx, dy, dz entsprechende Aenderung von U in jedem Zeitelemente die Grösse Null hat. Diese Bedingung lässt sich ausdrücken durch die Gleichung:

$$16)\quad 0 = dU = \left(\frac{dU}{dx}\right) dx + \left(\frac{dU}{dy}\right) dy + \left(\frac{dU}{dz}\right) dz, \quad \text{oder:}$$

$$17)\quad 0 = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Wenn man diesen Werth in Gleichung 4) oder Gleichung 5) substituirt, so findet man, dass $\cos\varphi = 0$, oder der Winkel φ ein rechter Winkel wird. Es ist also die Kraft K stets rechtwinkelig zu dem in der krummen Fläche liegenden Bahnelemente ds gerichtet, und da die Richtung des letzteren innerhalb der Fläche beliebig gedacht werden kann, so ergiebt sich hieraus die Eigenschaft jener krummen Fläche: dass dieselbe in jedem ihrer Punkte rechtwinkelig steht zu der Richtung, welche die wirkende Kraft K an dieser Stelle hat.

Fig. 101.



Die in den Gleichungen 10) und 11) definirte Grösse U wird die Kräfte-Function oder Potential-Function genannt. Es soll im Folgenden nachgewiesen werden, dass eine solche Kräfte-Function immer existirt, die Bewegung also stets dem in Gleichung 13) ausgedrückten Gesetze gemäss erfolgt: sobald die wirkende Kraft K eine anziehende oder abstossende Kraft ist, welche von einem festen Punkte P ausgeht und eine Function des Abstandes r von diesem Punkte ist. Aus Fig. 101 ergeben sich die Gleichungen:

$$18)\quad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

$$19)\quad \frac{dr}{dx} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{x-a}{r} = \cos\alpha.$$

Wenn $K = f'(r)$ die Kraft ist, die von dem festen Punkte P ausgeht, und mit $f(r)$ diejenige Function bezeichnet wird, von welcher $f'(r) = \frac{df(r)}{dr}$ die abgeleitete Function bildet, so ist immer:

$$20)\quad U = f(r) = f\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}\right)$$

diejenige Function, welche für den vorliegenden Fall die Eigenschaften der gesuchten Kräfte-Function besitzt. Denn man erhält, indem man den partiellen Differenzial-Quotienten nach x bildet, die Gleichung:

$$21)\quad \frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dr}\cdot\frac{dr}{dx} = f'(r)\left(\frac{x-a}{r}\right) = K\cos\alpha = X,$$

und auf dieselbe Weise findet man, dass die partiellen Differenzial-Quotienten von U nach y und z genommen, resp. die Seitenkräfte Y und Z darstellen. Die Flächen, in welchen U constant ist, sind in diesem Falle zugleich Flächen, in welchen r constant ist, folglich Kugelflächen, deren gemeinschaftlichen Mittelpunkt der Punkt P bildet.

Es lässt sich ferner zeigen, dass auch in dem Falle stets eine solche Kräfte-Function existirt, wenn die auf den materiellen Punkt wirkende Kraft K die Mittelkraft ist von mehreren Kräften K', K'' ..., deren jede von einem festen Punkte ausgeht und eine Function des Abstandes von demselben ist. Wenn nämlich mit U', U'' ... resp. die Kräfte-Functionen bezeichnet werden, welche für jene Kräfte einzeln genommen sich ergeben würden, so ist:

$$22)\quad U = U' + U'' + \ldots$$

für den vorliegenden Fall die gesuchte Kräfte-Function. Denn, wenn man den partiellen Differenzial-Quotienten von U nach x bildet:

$$23)\quad \frac{dU}{dx} = \frac{dU'}{dx} + \frac{dU''}{dx} + \cdots,$$

so erkennt man, dass die einzelnen Glieder auf der rechten Seite die Beiträge darstellen, welche von den einzelnen Kräften K', K'' ... zu der gesammten Seitenkraft X geliefert werden. Da das gleiche Resultat in Bezug auf die beiden anderen Coordinaten-Achsen sich ergeben würde, so ist U diejenige Grösse, welche den Bedingungsgleichungen 10) Genüge leistet.

...wendung auf Gravitationskräfte.

... dem umgekehrten Quadrate des A... Punkte ... Anziehungskraft is... Bezeichnungsweise d...

... für die Differenzialquotiente...

... der lebendigen Kraft führt in diese...

welche ... mit der Gleichung 17 des § ... zeigt, dass die ... bezeichnete Grösse $\frac{2\mu}{\rho} - \ldots$ während der Bewegung unverändert bleibt. Die Flächen, in denen die Grösse ... einen constanten Werth hat, sind concentrische Kugelflächen, deren Mittelpunkt das Anziehungscentrum ist. Jedesmal wenn der materielle Punkt dieselbe Kugelfläche wieder erreicht, wird auch seine Geschwindigkeit wieder denselben Werth annehmen.

Die mechanische Arbeit, welche die Anziehungskraft bei dem Uebergange des materiellen Punktes aus dem Abstande ρ_0 in den Abstand ρ verrichtete, hat die Grösse:

$$5)\quad \mathfrak{A} = \frac{m\mu}{\rho} - \frac{m\mu}{\rho_0},$$

und wenn man $\rho_0 = \infty$ setzt, so erhält man für diese Arbeitsgrösse den Werth:

$$6)\quad \frac{m\mu}{\rho} = U.$$

Die Kräfte-Function oder Potential-Function kann daher auch gedeutet werden als diejenige mechanische Arbeit, welche die Anziehung...

kraft bei dem Uebergange des materiellen Punktes aus unendlich grosser Entfernung in die dem gegebenen Abstande ρ entsprechende Lage verrichtet haben würde, wobei seine Geschwindigkeit (nach Gleichung 4) zunehmen würde von der Grösse v_0 bis zu der Grösse:

$$7)\quad v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2\mu}{\rho}}.$$

Da nach § 41 die Constante μ die Beschleunigung im Abstande „Eins" vom Anziehungscentrum bedeutet, und demnach:

$$8)\quad \frac{\mu}{\rho^2} = p$$

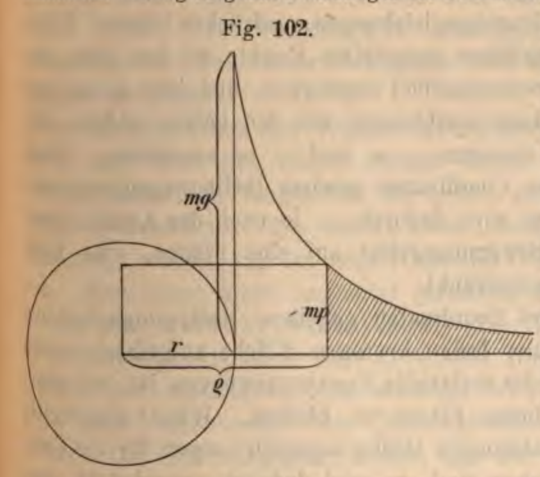
die Beschleunigung im Abstande ρ ist, so kann $\mu = p\rho^2$ gesetzt werden, und man erhält für die Geschwindigkeit v die Gleichung:

$$9)\quad v = \sqrt{v_0^2 + 2p\rho},$$

welche ihrer Form nach übereinstimmt mit der Gleichung 19) des § 31 und zeigt, dass jene Gleichung auch dann noch gültig bleibt, wenn die Anfangsgeschwindigkeit nicht in die Richtung der Anziehungskraft fiel, dass also auch das dort berechnete Zahlenbeispiel seine Gültigkeit für diesen Fall behält.

Nach den Berechnungen von Gruey*) hatte die am 14. Juni 1877 über Frankreich hinweg fliegende Feuerkugel die Geschwindigkeit $v = 93000^m$. Wie das am Schlusse des § 31 berechnete Zahlenbeispiel zeigt, folgt hieraus, dass jener Körper dem Sonnensysteme nicht angehörte, insofern er bereits eine Anfangsgeschwindigkeit von der Grösse $v_0 = 83000^m$ gehabt haben musste, bevor seine Bewegung durch die Anziehungskraft der Sonne merklich beeinflusst wurde. (Vergl. Schluss des § 43).

Fig. 102.



Für die Erde als Anziehungscentrum ergeben sich aus den Gleichungen 8) und 6) resp. die Werthe:

$$10)\quad \mu = p\rho^2 = gr^2,$$

*) Comptes rendus. 1877.

$$11)\quad U = mp\rho = \frac{mgr^2}{\rho}.$$

Die letztere Grösse als diejenige mechanische Arbeit, welche die Schwerkraft beim Uebergange des materiellen Punktes aus der Entfernung ∞ in die Entfernung ρ vom Erdmittelpunkte verrichtet haben würde, kann durch die in Fig. **102** schraffirte Fläche graphisch dargestellt werden, welche denselben Inhalt hat wie die Rechteckfläche von der Grundlinie ρ und der Höhe $mp = mg \cdot \frac{r^2}{\rho^2}$.

Capitel IX.

Bewegung des materiellen Punktes in vorgeschriebenen Bahnlinien und Flächen.

§ 50.

Widerstände fester Flächen, Linien, Punkte.

Die Bewegung des materiellen Punktes kann unter solchen Umständen erfolgen, dass einzelne von den auf ihn wirkenden Kräften sich durch Bedingungsgleichungen ausdrücken lassen. Einem vollkommen frei beweglichen materiellen Punkte ist der ganze unendliche Raum als Bewegungsgebiet zugänglich, und jede seiner drei Coordinaten x, y, z kann unabhängig von den beiden anderen alle Werthe zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen. Wenn dagegen für diese drei Coordinaten gewisse Bedingungsgleichungen vorgeschrieben sind, so wird dadurch — je nach der Anzahl dieser Gleichungen — das Bewegungsgebiet auf eine Fläche, eine Linie oder einen Punkt eingeschränkt.

Jede für die drei Coordinaten gegebene Bedingungsgleichung kann als Gleichung einer festen krummen Fläche aufgefasst werden und drückt aus, dass der materielle Punkt gezwungen ist, bei seiner Bewegung stets in dieser Fläche zu bleiben. Wenn gleichzeitig zwei von einander unabhängige Bedingungsgleichungen für die Coordinaten x, y, z, gegeben sind, so wird dadurch ausgedrückt, dass der materielle Punkt gezwungen ist, in zwei festen Flächen zugleich zu bleiben, d. h. in der Durchschnittslinie dieser beiden Flächen sich zu bewegen. Wenn die Zahl der von einander unabhängigen

Bedingungsgleichungen drei beträgt, so ist der materielle Punkt als ein fester Punkt zu betrachten, insofern der Durchschnittspunkt von drei festen Flächen als unveränderlicher Ort desselben gegeben ist.

In Wirklichkeit sind es stets Kräfte, welche das Bewegungsgebiet des materiellen Punktes einschränken. Diese Kräfte gehören zu der besonderen Gattung der „Widerstandskräfte", welche immer nur dann auftreten, wenn ohne ihr Vorhandensein eine jenen Bedingungen zuwiderlaufende Bewegung eintreten würde. So hat man sich z. B. bei dem zuletzt betrachteten Falle, in welchem die Bewegung durch drei Bedingungsgleichungen gleichzeitig eingeschränkt wurde, den materiellen Punkt festgehalten zu denken durch eine Widerstandskraft, welche gerade so gross und so gerichtet ist, wie es erforderlich ist, um die Mittelkraft aller übrigen Kräfte aufzuheben. Eine Kugel, welche in einem Rohre sich bewegt, wird durch die Gegendrücke der (unbeweglich vorausgesetzten) Rohrwände verhindert, seitwärts aus dem Rohre herauszutreten. Je kleiner man sich den Durchmesser der Kugel (und des Rohres) denkt, um so mehr nähert man sich der Vorstellung von einem materiellen Punkte, welchem eine bestimmte Linie, nämlich die Achsenlinie jenes Rohres, als Bahnlinie vorgeschrieben ist. In gleicher Weise kann man sich den Fall denken, dass ein materieller Punkt durch Gegendrücke unbeweglicher Wandflächen gezwungen wird, bei seiner Bewegung stets in gewissen krummen Flächen zu bleiben.

Den Gegendruck oder Widerstand der betreffenden festen Wandfläche kann man sich immer zerlegt denken in zwei Seitenkräfte, von denen die eine tangential, die andere normal zu der krummen Fläche gerichtet ist. Die erstere kann niemals auf dem Wege der Rechnung, sondern nur auf dem Wege der Erfahrung ermittelt werden. Man nennt diese tangential gerichtete Seitenkraft des Gegendrucks den Reibungswiderstand. Die Erfahrung lehrt, dass dieser Reibungswiderstand stets derjenigen Richtung entgenwirkt, in welcher der materielle Punkt entweder wirklich sich bewegt oder ohne das Vorhandensein des Reibungswiderstandes sich bewegen würde. Die Erfahrung lehrt ferner, dass die Grösse des Reibungswiderstandes annähernd als der Grösse des normalen Gegendrucks proportional angenommen werden darf, dass also das Verhältniss des Reibungswiderstandes zum Normaldruck einen unveränderlichen, nur von der Beschaffenheit der Flächen abhängigen Werth hat.

Dieses Verhältniss wird der **Reibungscoefficient** genannt. Je glatter die Flächen sind, um so kleiner ist der Reibungscoefficient, und in solchen Fällen, wo es als zulässig erachtet werden kann, die Flächen als absolut glatt zu betrachten, wird man daher den Gegendruck der festen Fläche gegen den materiellen Punkt als stets normal zu der Fläche gerichtet betrachten dürfen. Dieser Normaldruck ist immer gerade so gross, wie es erforderlich ist, um zu verhindern, dass der materielle Punkt die Fläche verlässt. Zur Bestimmung der Grösse dieses Normaldrucks, welche als eine neue unbekannte Grösse in die Rechnung eintritt, bedarf es einer neu hinzukommenden Gleichung, und diese ist durch die Gleichung der krummen Fläche gegeben. Sobald der Normaldruck seiner Grösse und Richtung nach bekannt ist, kann man die Bewegung des materiellen Punktes nach denselben Regeln bestimmen, welche für die Bewegung des freien materiellen Punktes gefunden wurden.

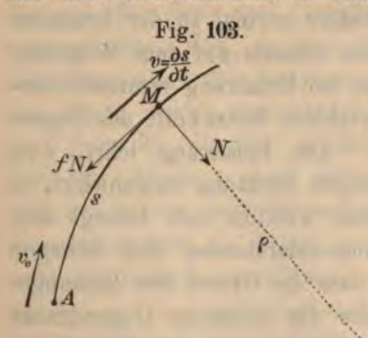
Ein materieller Punkt, welchem eine **Linie** als Bahn vorgeschrieben ist, kann betrachtet werden als gezwungen in jeder von zwei festen Flächen zu bleiben, welche in jener Linie einander schneiden. Der normale Gegendruck dieser Bahnlinie kann also als Mittelkraft aus den Normaldrücken jener beiden festen Flächen seiner Grösse und Richtung nach bestimmt werden.

§ 51.

Bewegung eines materiellen Punktes längs vorgeschriebener Bahnlinie unter alleiniger Einwirkung des Normaldrucks und des Reibungswiderstandes.

Wenn mit f der Reibungscoefficient bezeichnet wird, so ist der dem Normaldrucke N entsprechende Reibungswiderstand gleich fN, und die Richtung desselben ist der augenblicklichen Bewegungsrichtung entgegengesetzt. Nach der im vorigen Paragraphen gegegebenen Erklärung bewegt sich der materielle Punkt längs der vorgeschriebenen Bahnlinie AM wie ein freier materieller Punkt unter Einwirkung der beiden Kräfte N und fN sich bewegen würde (Fig. 103). Der Normaldruck N ertheilt der Masse m des materiellen Punktes die nach dem Krümmungsmittelpunkt O hin gerichtete Centripetal-Beschleunigung, welche nach

Fig. 103.



§ 6 (Fig. 8) stets die Grösse $\frac{v^2}{\rho}$ hat. Der tangential gerichtete Reibungswiderstand fN bringt die (in diesem Falle negative) Tangential-Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ hervor. Es ergeben sich also für diese beiden Seitenbeschleunigungen die Gleichungen:

$$\frac{N}{m} = \frac{v^2}{\rho}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{fN}{m}.$$

Wenn man den aus ersterer Gleichung für N zu entnehmenden Werth in der zweiten substituirt, so nimmt dieselbe die Form an:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{fv^2}{\rho}.$$

Während der materielle Punkt das Bahnelement ds durchläuft, ändert sich die Richtung seiner Bewegung um einen unendlich kleinen Winkel, welcher mit $d\alpha$ bezeichnet werden soll. Das Bahnelement ds kann als Kreisbogenelement, dessen Halbmesser ρ und dessen Centriwinkel $d\alpha$ ist, betrachtet werden; folglich ist:

$$ds = \rho\, d\alpha.$$

Durch Multiplication dieser letzteren Gleichung mit der vorhergehenden erhält man die Gleichung:

$$\frac{ds}{dt} dv = -f v^2 d\alpha,$$

welcher man nach Substitution des Werthes $\frac{ds}{dt} = v$ auch die Form geben kann.

$$\frac{dv}{v} = -f\, d\alpha.$$

Während der materielle Punkt den Bogen $AM = s$ durchläuft, vermindert sich seine Geschwindigkeit allmählich von v_0 bis auf die Grösse v. Man erhält also, indem man die obige Gleichung integrirt, und zwar auf der linken Seite zwischen den Grenzen v_0 und v, zur Bestimmung der Endgeschwindigkeit v die Gleichung:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -f \int d\alpha, \quad \text{oder:} \quad \lg\left(\frac{v}{v_0}\right) = -f \int d\alpha.$$

In dieser Gleichung bedeutet $\int d\alpha$ die Summe aller unendlich kleinen Aenderungen, welche die Geschwindigkeitsrichtung des materiellen Punktes während Zurücklegung des Weges von A bis M

nach und nach erleidet. Für die Endgeschwindigkeit v ergi
aus obiger Gleichung der Werth:

$$v = v_0 \cdot e^{-f \int d\alpha.}$$

Fig. 104.



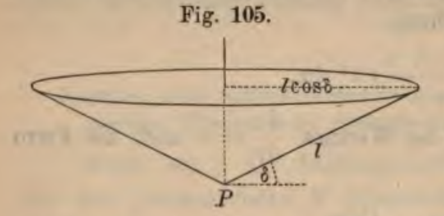
Der geometrische Ort aller geraden Linien von irgend einem Punkte P aus parallel zu d genten einer unter dem Winkel δ ansteigenden Sc linie gelegt werden, ist eine Kegelfläche mit de Convergenzwinkel $90^0 - \delta$ (Fig. 104 und 105). man sich einen dünnen Draht in Form einer Schraubenlinie gebogen und eine längs des Dra schiebbare Hülse, welche so klein ist, dass di materieller Punkt behandelt werden darf, eine AM dieser Schraubenlinie durchlaufend, so erke dass die Summe aller Richtungsänderungen i Falle durch den Winkel dargestellt wird, we der abgewickelten als Kreissector in der Eben breiteten Kegelfläche die beiden End-Radien mit einschliessen würden. Es ist also in diesem F

$\int l\, d\alpha = 2\pi l \cos\delta$, oder: $\int d\alpha = 2\pi \cos\delta$ und $v = v_0 \cdot e^{-f \cdot}$

Setzt man hierin $\delta = 60^0$ und $f = 0{,}1$, so wird $v = \frac{v_0}{1{,}37}$, d. h. es wü

Durchlaufen jeder Windung die Geschwindigkeit im Verhältniss $1 : \frac{}{1}$

Fig. 105.



vermindern. Wenn man deres Mal $\delta = 0^0$ setzt — chend dem Falle, wo die Sc linie in eine Kreislinie übe so wird $v = \frac{v_0}{1{,}875}$. Ni bei der Kreislinie, sond bei jeder anderen ebene

ohne Wendepunkte würde die Geschwindigkeit im Verhältniss $1 : \frac{}{1,}$ vermindern bei jedem vollen Umlaufe, d. h. beim Durchlaufen d Bogens, nach dessen Zurücklegung die Geschwindigkeitsrichtung zu Male wieder mit der Anfangsrichtung parallel wird.

§ 52.

Cycloidenpendel.

Da der normale Gegendruck der Bahnlinie keine mec Arbeit verrichten kann, so ist es nur die Schwerkraft mg, bei dem in verticaler Ebene längs des Cycloidenbogens A Reibung hinabgleitenden materiellen Punkte mechanische verrichtet (Fig. 106). Man erhält daher nach dem Princ

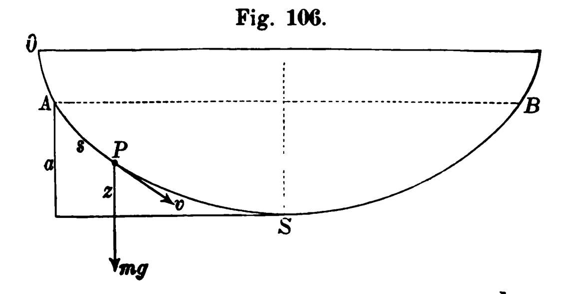
lebendigen Kraft (§ 47, Gleichung 7) zur Bestimmung der Geschwindigkeit v die Gleichung:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = mg(a - z),$$

und wenn die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ gesetzt wird, so ergiebt sich hieraus für die Geschwindigkeit v der Werth:

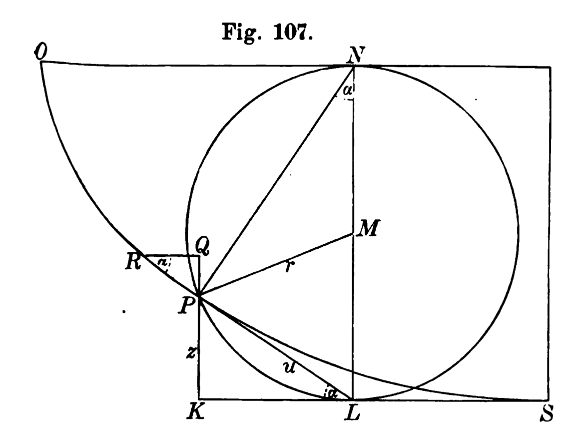
$$1) \quad v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(a - z)}.$$

Fig. 106.



Man kann sich die Cycloide (wie bereits mit Bezug auf Fig. 97 erklärt wurde) entstanden denken durch die Bewegung eines an der unteren Seite der Horizontalen ON entlang rollenden Kreises, wobei der Punkt P der Kreisperipherie die Cycloide beschreibt (Fig. 107). Aus der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes (§ 9 und § 10) ergiebt sich alsdann, dass die Normale zur Cycloide stets durch den Berührungspunkt N des rollenden Kreises oder den oberen Endpunkt des verticalen Durchmessers hindurchgeht, folglich die Tangente stets durch dessen unteren Endpunkt L. Aus Fig. 107 ergeben sich hiernach die Gleichungen:

Fig. 107.



$$\sin\alpha = \frac{z}{u} = \frac{u}{2r}, \quad \text{oder:} \quad u = \sqrt{2rz}, \quad \text{folglich:}$$

$$2) \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{z}{2r}}.$$

Aus dem unendlich kleinen rechtwinkeligen Dreiecke PQR, d verticale Kathete $PQ = dz$, und dessen Hypotenuse PR al dem Zuwachs dz entsprechende negative Zuwachs von s aufg gleich $-ds$ ist, ergiebt sich ferner die Gleichung:

$$3)\quad \sin\alpha = \frac{PQ}{PR} = -\frac{dz}{ds}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden für $\sin\alpha$ gefundenen Werth hält man die Gleichung:

$$4)\quad -\frac{dz}{ds} = \sqrt{\frac{z}{2r}},$$

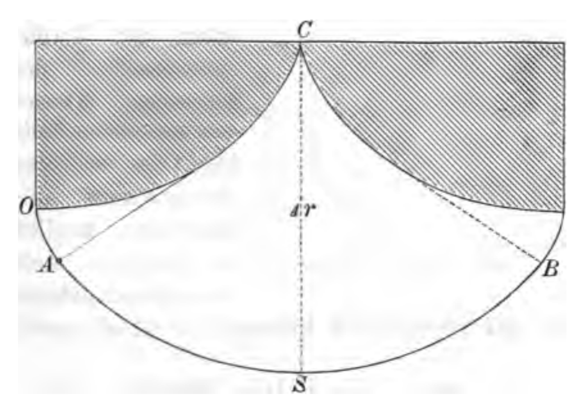
und wenn man den aus dieser Gleichung für ds sich ergeb Werth in Gleichung 1) substituirt, so nimmt dieselbe für dt gelöst die Form an:

$$5)\quad dt = -\sqrt{\frac{r}{g}} \frac{dz}{\sqrt{az - z^2}}.$$

Für die Zeit t_1, nach welcher der materielle Punkt die tiefste der Bahnlinie erreicht, erhält man durch Integration der v Gleichung den Ausdruck:

$$6)\quad t_1 = -\sqrt{\frac{r}{g}} \int_{z=a}^{z=0} \frac{dz}{\sqrt{az - z^2}} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Fig. 108.



Die gleiche gebraucht de terielle Punk jenseits des S telpunktes S derbis zum P B hinanzus (Fig. 106). die ganze] der Bewegun A nach B e sich demnac Werth:

$$7)\quad T = 2\pi \Big|$$

An dem Endpunkte B angekommen, wird der materielle beginnen, wieder rückwärts nach dem Anfangspunkte A hi

zu bewegen und so fortfahren, zwischen den beiden Endpunkten des Bogens hin und her zu schwingen. Die Dauer einer Schwingung ist, wie die obige Gleichung zeigt, völlig unabhängig von der Schwingungsweite (vergl. § 35).

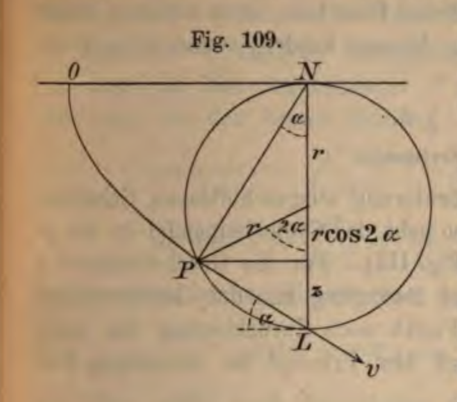


Fig. 109.

Die Evolute der Cycloide ist eine Curve, deren beide Zweige ein jeder mit der einen Hälfte der gegebenen Cycloide ihrer Form nach übereinstimmen. Denkt man sich im Krümmungsmittelpunkte C des Scheitelpunktes S der gegebenen Cycloide einen gewichtlosen Faden von der Länge $4r$ befestigt und an dem unteren Endpunkt desselben eine Kugel hängend, welche klein genug ist, um als materieller Punkt gelten zu können, so wird die gegebene Cycloide als vorgeschriebene Bahn dieses materiellen Punktes zu betrachten sein: sobald zu beiden Seiten des Fadens Schablonen angebracht sind, welche nach der Form jener beiden Evolutenzweige ausgeschnitten sind, und an welche der Faden stets in tangentialer Richtung sich anlegt (Fig. **108**).

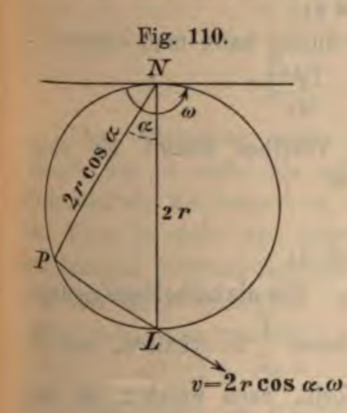


Fig. 110.

Wenn $a = 2r$ war, d. h. wenn der Anfangspunkt A mit dem Punkte O zusammen fiel, so wird nach (Fig. **109**):

$$8)\quad v = \sqrt{2g(2r - z)} = \sqrt{2gr(1 + \cos 2\alpha)}, \text{ oder:}$$

$$9)\quad v = 2r\cos\alpha\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

In diesem Falle stimmt die Bewegung des materiellen Punktes überein mit der Bewegung, welche ein Punkt in der Peripherie eines gleichförmig längs der Horizontalen ON rollenden Kreises ausführen würde, wenn die Winkelgeschwindigkeit seiner Drehbewegung die Grösse:

$$10)\quad \omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

hätte, d. h. wenn der Kreis mit der Geschwindigkeit $c = r\omega = \sqrt{gr}$ an der Horizontalen ON entlang rollte (Fig. **110**). Für diesen Fall gelten also die in § 46 gefundenen Resultate, nach welchen sämmtliche Hodographen congruente Kreise werden, wenn $\omega = 1$ *oder* $r = g$ ist.

§ 53.

Kreispendel.

Wenn die beiden cycloidenförmig ausgeschnittenen Schablonen in Fig. **108** beseitigt werden, so geht das Cycloidenpendel in das gewöhnliche Kreispendel über (Fig. **111**). Für die Geschwindigkeit v, welche der im Punkte A seine Bewegung mit der Geschwindigkeit Null beginnende materielle Punkt nach Zurücklegung des Bogens AM erreicht, ergiebt sich nach dem Principe der lebendigen Kraft die Gleichung:

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = mg\,(l\cos\theta - l\cos\alpha), \text{ oder:}$$

$$1)\quad v = \sqrt{2gl\,(\cos\theta - \cos\alpha)}.$$

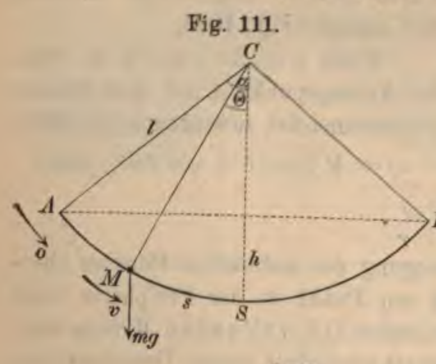
Nach der in Fig. **111** gewählten Bezeichnung kann man setzen:

$$v = -\frac{ds}{dt} = -\frac{l\,d\theta}{dt},$$

und nach Substitution des letzteren Werthes nimmt die obige Gleichung für dt aufgelöst die Form an:

$$2)\quad dt = \frac{-l\,d\theta}{\sqrt{2gl\,(\cos\theta - \cos\alpha)}}.$$

Fig. 111.



Um die halbe Schwingungsdauer $\frac{T}{2}$ zu erhalten, oder die Zeit, nach welcher der materielle Punkt die tiefste Stelle S der Bahn erreicht, hat man den Ausdruck auf der rechten Seite zwischen den Grenzen $\theta = \alpha$ und $\theta = 0$ zu integriren. Es ist also:

$$\frac{T}{2} = -\int_{\theta=\alpha}^{\theta=0} \frac{l\,d\theta}{\sqrt{2gl\,(\cos\theta - \cos\alpha)}}, \text{ oder:}$$

$$3) \quad T = -2\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_{\theta=\alpha}^{\theta=0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

Wenn der anfängliche Elongationswinkel α sehr klein war, so kann man die Schwingungsdauer T annäherungsweise bestimmen, indem man von den beiden Reihen:

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{1.2} + \frac{\theta^4}{1.2.3.4} - \cdots$$

nur die ersten beiden Glieder einer jeden beibehält, also:

$$\cos\theta - \cos\alpha = \frac{\alpha^2 - \theta^2}{2}$$

setzt. Man erhält nach Substitution dieses Werthes die Gleichung:

$$T = -2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\theta=\alpha}^{\theta=0}\frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2-\theta^2}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\text{arc}\cos\frac{\theta}{\alpha}\right]_{\theta=\alpha}^{\theta=0}, \text{ oder:}$$

$$4) \quad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Schwingungsdauer des Kreispendels um so mehr als unabhängig von der Gröese des Schwingungswinkels 2α betrachtet werden darf, je kleiner dieser Winkel ist, oder je mehr der Schwingungsbogen ASB die Form einer geradlinigen Schwingungsbahn annimmt (vergl. § 35).

Um einen genaueren Werth für die Schwingungsdauer abzuleiten, setzt man zunächst:

$$5) \quad 1 - \cos\theta = \psi, \quad 1 - \cos\alpha = \beta$$

und entsprechend der ersteren von diesen beiden Gleichungen:

$$\sin\theta d\theta = d\psi, \text{ oder: } d\theta = \frac{d\psi}{\sin\theta} = \frac{d\psi}{\sqrt{1-\cos\theta^2}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1-(1-\psi)^2}}.$$

Nach Substitution dieser Werthe nimmt alsdann Gleichung 2) die Form an:

$$6) \quad dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\psi}{\sqrt{\beta\psi-\psi^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\psi}{2}}}.$$

Für den letzten Factor auf der rechten Seite kann man nunmehr die binomische Reihe substituiren:

$$7)\ \left(1-\frac{\psi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\psi}{2}\right)^{1}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\left(\frac{\psi}{2}\right)^{2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\left(\frac{\psi}{2}\right)^{3}+$$

Wenn man dann wieder wie oben integrirt zwischen c Grenzen $\theta=\alpha$ und $\theta=0$, oder nach Gleichung 5) zwischen c entsprechenden Grenzen $\psi=\beta$ und $\psi=0$, so erhält man (Gleichung:

$$\frac{T}{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{\psi=\beta}^{\psi=0}\frac{d\psi}{\sqrt{\beta\psi-\psi^2}}\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\psi}{2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\left(\frac{\psi}{2}\right)^2+\ldots\right\},\ \text{oder}$$

$$8)\ T=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\beta}\frac{d\psi}{\sqrt{\beta\psi-\psi^2}}\left\{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\psi}{2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\left(\frac{\psi}{2}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\left(\frac{\psi}{2}\right)^3+\cdots\right.$$

Dem ersten Gliede auf der rechten Seite entspricht der Gleichung 4) gefundene Werth von T. Jedes der übrigen Glie(enthält als Factor ein Integral, welches nach der Reductionsform

$$9)\ \int\frac{\psi^n d\psi}{\sqrt{\beta\psi-\psi^2}}=-\frac{\psi^{n-1}}{n}\sqrt{\beta\psi-\psi^2}+\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\beta\int\frac{\psi^{n-1}d\psi}{\sqrt{\beta\psi-\psi^2}}$$

bestimmt werden kann, und für welches man mit Berücksichtigu der Integrationsgrenzen den Ausdruck erhält:

$$10)\quad \int_0^{\beta}\frac{\psi^n d\psi}{\sqrt{\beta\psi-\psi^2}}=\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\beta\int_0^{\beta}\frac{\psi^{n-1}d\psi}{\sqrt{\beta\psi-\psi^2}},$$

oder, indem man auf das den letzten Factor bildende Integ abermals die obige Reductionsformel anwendet, den Ausdruck:

$$11)\int_0^{\beta}\frac{\psi^n d\psi}{\sqrt{\beta\psi-\psi^2}}=\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\beta\cdot\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)\beta\cdot\left(\frac{2n-5}{2n-4}\right)\beta\cdots\int_0^{\beta}\frac{d\psi}{\sqrt{\beta\psi-\psi^2}}$$

$$=\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2n-3}{2n-2}\right)\left(\frac{2n-5}{2n-4}\right)\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\beta^n\cdot\pi.$$

Nach Substitution der aus dieser allgemeinen Formel für die ei zelnen Glieder der obigen Reihe zu entnehmenden Werthe erh: man aus der Gleichung 8) für T den Werth:

$$12)\quad T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\beta}{2}\right)+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{\beta}{2}\right)^3+\cdots\right.$$

und wenn man hierin für β den aus Gleichung 5) und Fig. 1 zu entnehmenden Werth:

$$\beta = 1 - \cos\alpha = 1 - \frac{l-h}{l} = \frac{h}{l}$$

substituirt, so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$13) \quad T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{h}{2l}\right)^1 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{2l}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \left(\frac{h}{2l}\right)^3 + \cdots \right\}.$$

Wenn z. B. der Schwingungswinkel $2\alpha = 22^0\, 57'\, 30''$ ist, so wird: $\cos\alpha = 0{,}98$ und $\frac{h}{2l} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = 0{,}01$. Es ergiebt sich also für die Schwingungsdauer der Werth:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{400} + \frac{9}{640000} + \frac{225}{2\,304\,000\,000} + \cdots \right\}.$$

Wenn man ein anderes Mal die dem Schwingungswinkel $2\alpha = 7^0\, 15'$ entsprechenden Werthe: $\cos\alpha = 0{,}998$ und $\frac{h}{2l} = 0{,}001$ substituirt, so erhält man für die Schwingungsdauer den Werth:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{4000} + \frac{9}{64\,000\,000} + \frac{225}{2\,304\,000\,000\,000} + \cdots \right\}.$$

Man erkennt an diesen Zahlenbeispielen, dass bei noch kleineren Schwingungswinkeln, z. B. solchen, welche nur Bruchtheile eines Grades betragen, der Fehler sehr klein wird, den man begeht, indem man die Schwingungsdauer nach der einfacheren Gleichung 4) berechnet.

§ 54.

Bewegung des materiellen Punktes in einer Kegelfläche unter Einwirkung der Schwerkraft.

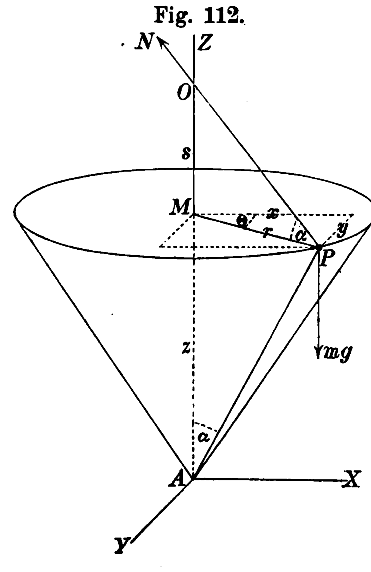
Es soll auch hier wieder vorausgesetzt werden, dass der materielle Punkt ohne Reibung sich bewegt, dass also der Gegendruck der festen Kegelfläche stets normal zu derselben gerichtet ist. Es soll ferner vorausgesetzt werden, dass die Achse der Kegelfläche eine verticale Lage hat, und dass ausser dem Normaldrucke N das Gewicht mg die einzige Kraft ist, welche auf den materiellen Punkt wirkt. Für die drei Seitenbeschleunigungen desselben ergeben sich alsdann nach Fig. 112 die Gleichungen:

$$1) \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{N\cos\alpha\cos\theta}{m}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{N\cos\alpha\sin\theta}{m}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{N\sin\alpha - mg}{m}, \end{cases}$$

welche nach Substitution der Werthe $\cos\theta = \frac{x}{r}$ und $\sin\theta =$ die Formen annehmen:

$$2)\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{N\cos\alpha}{m}\cdot\frac{x}{r}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{N\cos\alpha}{m}\cdot\frac{y}{r}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = +\frac{N\sin\alpha}{m} - g. \end{cases}$$

Fig. 112.



Aus diesen drei Gleichun könnte man zunächst (auf dies Weise wie in § 47 geschehen) wi die Gleichung der lebendigen K ableiten, indem man die erste dx, die zweite mit dy, die dı mit dz multiplicirt und die G chungen dann addirt. Man würde dann zu der Gleichung gelange

$$3)\quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -mg\,dz.$$

Statt dessen kann man a das Princip der lebendigen Kraft einen in § 47 bereits bewiese Lehrsatz unmittelbar anwenden (mit Berücksichtigung des Umstan dass der Normaldruck N k mechanische Arbeit verrichtet) setzen:

$$4)\quad \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mg\,(z - z_0),$$

indem man die Anfangsgeschwindigkeit mit v_0 und den Anfan werth von z mit z_0 bezeichnet.

Wenn man ferner von den Gleichungen 2) die erste mit die zweite mit x multiplicirt und alsdann die erste von der zwei subtrahirt, so erhält man (auf dieselbe Weise wie in § 41) Gleichung:

$$5)\quad x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \text{ oder: } x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \text{Const.},$$

welche letztere nach Substitution der Werthe $x = r\cos\theta$ ı $y = r\sin\theta$ die Form annimmt:

$$6)\quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{Const.}$$

Man kann die Geschwindigkeit v betrachten als die Resultirende aus der verticalen Seitengeschwindigkeit $\frac{dz}{dt}$ und einer horizontalen Seitengeschwindigkeit, welche letztere auch aufgefasst werden kann als die Geschwindigkeit, mit welcher die Projection des materiellen Punktes auf der Horizontal-Ebene sich bewegt. Diese Geschwindigkeit der Horizontal-Projection setzt sich zusammen aus den beiden Seitengeschwindigkeiten $\frac{dr}{dt}$ und $r\frac{d\theta}{dt}$ (Fig. **113**).

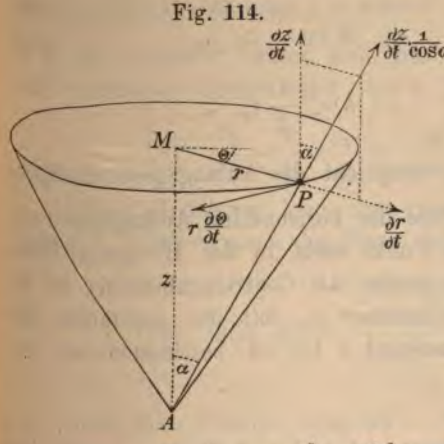
Fig. 113.

Die obige Gleichung drückt aus: dass das Product aus der letzteren in den Abstand r (oder das statische Moment der Geschwindigkeit v in Bezug auf die Achse AZ) einen constanten Werth hat. Wenn also — wie hier vorausgesetzt werden soll — die Anfangsgeschwindigkeit v_0 horizontal gerichtet war, und der Anfangswerth von r mit r_0 bezeichnet wird, so ist:

$$7)\quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = v_0 r_0, \text{ oder:}$$

$$r\frac{d\theta}{dt} = v_0 \frac{r_0}{r} = v_0 \frac{z_0}{z}.$$

Fig. 114.



Für die Geschwindigkeit v ergiebt sich ferner nach der in Fig. **114** angegebenen Art der Zerlegung die Gleichung:

$$8)\quad v^2 = \left(r \cdot \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2,$$

welcher man mit Benutzung des in Gleichung 7) für $r\frac{d\theta}{dt}$ gefundenen Werthes auch die Form geben kann:

$$9)\quad v^2 = v_0^2 \cdot \frac{z_0^2}{z^2} + \left(\frac{dz}{dt} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2.$$

Indem man diesen Ausdruck dem aus Gleichung 4) zu entnehmenden Werthe von v^2 gleichsetzt, erhält man die Gleichung:

$$10)\quad 2g\left(\frac{v_0^2}{2g}+z_0-z\right)=v_0^2\cdot\frac{z_0^2}{z^2}+\left(\frac{dz}{dt}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2,$$

und wenn man hierin abkürzungsweise die Geschwindigkeitshöh $\frac{v_0^2}{2g}=h$ setzt, so liefert dieselbe für das Quadrat der verticale Seitengeschwindigkeit den Werth:

$$11)\quad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2=-\frac{2g\cos\alpha^2}{z^2}\left\{z^3-(h+z_0)\,z^2+hz_0^2\right\},\ \text{oder:}$$

$$12)\quad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2=-\frac{2g\cos\alpha^2}{z^2}\left(z-z_0\right)\left\{z^2-hz-hz_0\right\}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass es ausser dem Werthe $z=z$ noch einen zweiten Werth $z=z_1$ giebt, für welchen $\frac{dz}{dt}=0$ wir Man findet denselben, indem man den letzten Factor auf der rechte Seite gleich Null setzt, aus der Gleichung:

$$13)\quad 0=z_1^2-hz_1-hz_0,\ \text{oder:}\ z_1=\frac{1}{2}h+\sqrt{\left(\frac{1}{2}h\right)^2+hz}$$

Es ergiebt sich aus dieser letzteren Gleichung, dass:

$z_1 > z_0$ wird, wenn $h > \frac{1}{2}z_0$ ist,

$z_1 = z_0$ „ „ $h = \frac{1}{2}z_0$ „

$z_1 < z_0$ „ „ $h < \frac{1}{2}z_0$ „ .

Dem Werthe $h=\frac{1}{2}z_0$ entspricht die Anfangsgeschwindigke $v_0=\sqrt{gz_0}$. Bei dieser Grösse der horizontalen Anfangsgeschwi digkeit bleibt der materielle Punkt stets in der Horizontal-Ebe des Anfangspunktes und beschreibt (als Centrifugalpendel) die h rizontale Kreislinie vom Halbmesser r_0 mit der constanten G schwindigkeit v_0. Die Umlaufszeit t ist zu bestimmen aus d Gleichung:

$$14)\quad v_0\,t=2r_0\pi,$$

aus welcher man nach Substitution des obigen Werthes von v_0 m Berücksichtigung des Umstandes, dass nach der in Fig. 112 gewähl

ten Bezeichnung $\frac{r_0}{z_0} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{s}{r_0}$ gesetzt werden kann, für t den Werth erhält:

$$15)\quad t = 2\pi \sqrt{\frac{r_0}{g} \cdot \frac{r_0}{z_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{s}{g}}.$$

§ 55.

Bewegung des materiellen Punktes in einer Kegelfläche unter alleiniger Wirkung des Normaldrucks derselben.

Wenn man in den Gleichungen des vorigen Paragraphen überall die Grösse g gleich Null setzt, so gelten dieselben für die Bewegung eines materiellen Punktes, welcher ohne Einwirkung der Schwerkraft in einer festen Kegelfläche sich bewegt. Aus Gleichung 4) folgt, dass die Bewegung in diesem Falle mit der constanten Geschwindigkeit $v = v_0$ erfolgt, und der Gleichung 9) kann man nach Substitution dieses Werthes auch die Form geben:

$$16)\quad \frac{z\,dz}{\sqrt{z^2 - z_0^2}} = v \cos\alpha \,.\, dt,$$

worauf man durch Integration derselben die Gleichung erhält:

$$17)\quad \sqrt{z^2 - z_0^2} = v \cos\alpha \,.\, t, \text{ oder: } z = \sqrt{z_0^2 + (v \cos\alpha \,.\, t)^2}.$$

Je grösser t wird, um so kleiner wird der Fehler, welchen man begeht, indem man $z = v \cos\alpha \,.\, t$, oder: $\frac{dz}{dt} = v \cos\alpha$ setzt, d. h. um so mehr nähert sich die verticale Seitengeschwindigkeit dem constanten Grenzwerthe $v \cos\alpha$. Nach Gleichung 7) ist:

$$18)\quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{r} \cdot \frac{z_0}{z} = \frac{v_0 z_0}{z^2 \operatorname{tg}\alpha}.$$

Dieser Gleichung kann man nach Substitution des für z gefundenen Werthes auch die Form geben:

$$19)\quad \sin\alpha \,.\, d\theta = \frac{d\left(\frac{v}{z_0} \cos\alpha \cdot t\right)}{1 + \left(\frac{v}{z_0} \cos\alpha \,.\, t\right)^2}$$

und wenn man dieselbe integrirt — auf der linken Seite zwischen den Grenzen θ_0 und θ, auf der rechten Seite zwischen den Grenzen 0 und t — so erhält man die Gleichung:

$$20)\quad (\theta - \theta_0)\sin\alpha = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{v}{z_0}\cos\alpha\,.\,t\right),\ \text{oder:}$$

$$21)\quad v\cos\alpha\,.\,t = z_0\ \operatorname{tg}\left\{(\theta - \theta_0)\sin\alpha\right\}.$$

Indem man diesen Werth dem in Gleichung 17) gefundene gleichsetzt, gelangt man schliesslich zu der Gleichung:

$$22)\quad \sqrt{z^2 - z_0^2} = z_0\ \operatorname{tg}\left\{(\theta - \theta_0)\sin\alpha\right\},\ \text{oder:}$$

$$23)\quad \frac{z}{z_0} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}\{(\theta - \theta_0)\sin\alpha\}^2} = \frac{1}{\cos\{(\theta - \theta_0)\sin\alpha\}}$$

wofür man, da $\frac{z}{z_0} = \frac{r}{r_0}$ ist, auch setzen kann:

$$24)\quad \frac{r}{r_0} = \frac{1}{\cos\{(\theta - \theta_0)\sin a\}},$$

und wenn man das Coordinatensystem so legt, dass der Anfang- punkt der Bahnlinie in die XZ-Ebene fällt, so ergiebt sich fü die Polargleichung der Bahnlinie, welche die Horizontalprojecti des materiellen Punktes beschreibt, die noch einfachere Form:

$$25)\quad r = \frac{r_0}{\cos(\theta\,.\,\sin\alpha)}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass $r = \infty$ wird, wenn $\theta\,.\,\sin\alpha = -$

wird. Es nähert sich also der Winkel θ unaufhörlich einem be- stimmten von der Grösse des Winkels α abhängigen Grenzwerth ohne denselben je zu erreichen, und zwar wird z. B. dieser Gren- werth:

$$\theta = \frac{\pi}{2},\ \text{wenn}\ \sin\alpha = 1\ \text{ist,}$$

$$\theta = \pi\quad ,,\quad \sin\alpha = \frac{1}{2}\ ,,$$

$$\theta = 2\pi\quad ,,\quad \sin\alpha = \frac{1}{4}\ ,,.$$

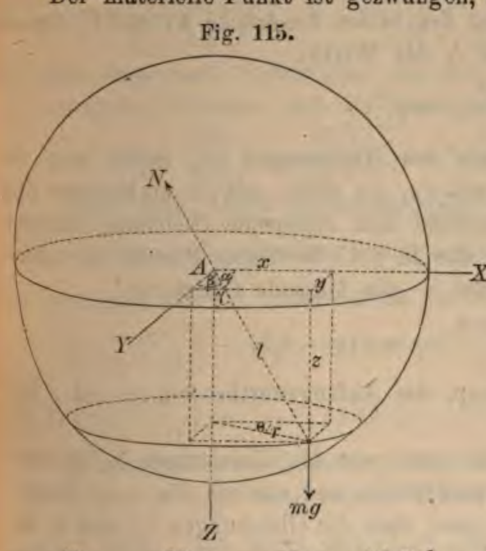
Durch diesen Grenzwinkel wird zugleich in der Kegelfläc selbst die Lage derjenigen Seitenlinie bestimmt, welcher die Bah linie des materiellen Punktes asymptotisch sich annähert.

§ 56.

Bewegung des materiellen Punktes in einer Kugelfläche.

Der materielle Punkt ist gezwungen, sich so zu bewegen, dass sein Abstand von dem festen Mittelpunkte der Kugel die unveränderliche Grösse l stets beibehält (Fig. **115**). Es sind daher die Coordinaten, resp. die Seitengeschwindigkeiten und Seitenbeschleunigungen des materiellen Punktes den Bedingungsgleichungen unterworfen.

Fig. 115.



$$1)\quad x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

$$2)\quad x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0,$$

$$3)\quad x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 0.$$

Da die Summe der letzten drei Glieder gleich dem Quadrate der Geschwindigkeit v ist, so kann man der dritten Gleichung auch die folgende Form geben:

$$4)\quad x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} = -v^2.$$

Für die drei Seitenbeschleunigungen ergeben sich aus Fig. **115** die Gleichungen:

$$5)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{N\cos\alpha}{m} = -\dfrac{N}{m}\dfrac{x}{l}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{N\cos\beta}{m} = -\dfrac{N}{m}\dfrac{y}{l}, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{-N\cos\gamma + mg}{m} = -\dfrac{N}{m}\dfrac{z}{l} + g. \end{cases}$$

Wenn man von diesen drei Gleichungen die erste mit x, die zweite mit y, die dritte mit z multiplicirt, und dieselben dann addirt,

so erhält man unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichung 1 die folgende Gleichung:

$$6)\quad x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{Nl}{m}+gz.$$

Aus der Gleichsetzung der beiden Ausdrücke 4) und 6) ergiel sich für den Normaldruck N der Werth:

$$7)\quad N=\frac{mv^2}{l}+mg\frac{z}{l}\cdot$$

Man erhält ferner aus den Gleichungen 5), indem man d erste mit dx, die zweite mit dy, die dritte mit dz multiplicirt ui die aus der Addition derselben sich ergebende Gleichung integri — oder auch indem man das in § 47 bewiesene Princip der lebe digen Kraft direct anwendet — die folgende Gleichung:

$$8)\quad \frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=mg(z-z_0),$$

in welcher v_0 und z_0 resp. die Anfangswerthe von v und z b deuten.

Indem man schliesslich noch von den Gleichungen 5) die ers mit y, die zweite mit x multiplicirt und alsdann die erste von d zweiten subtrahirt, findet man, dass die Gleichungen 5) und 6) d § 54, sowie die Fig. **113** als Darstellung der Horizontalprojecti der Bewegung, auch für diesen Fall ihre Gültigkeit behalten. ist also wie in § 54:

$$9)\quad x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=v_0r_0$$

zu setzen, wenn auch hier wieder die Annahme gemacht wird, da die Anfangsgeschwindigkeit v_0 horizontale Richtung hatte, also rec winkelig zu dem anfänglichen Radiusvector r_0 der Horizontalpr jection gerichtet war (Fig. **113**).

Wenn man der Gleichung 2) die folgende Form giebt:

$$10)\quad x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}=-z\frac{dz}{dt},$$

und dann das Quadrat derselben zu dem Quadrate der Gleichung addirt, so erhält man die Gleichung:

$$11)\quad (x^2+y^2)\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}=v_0^2r_0^2+z^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

wofür man mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichung 1) u der Beziehungen, welche zwischen der Geschwindigkeit v und ihr drei Seitengeschwindigkeiten stattfinden, auch setzen kann:

$$12)\ (l^2 - z^2)\left\{v^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} = v_0^2 r_0^2 + z^2 \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich für das Quadrat der verticalen Seitengeschwindigkeit der Ausdruck:

$$13)\ \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{(l^2 - z^2)\, v^2 - v_0^2 r_0^2}{l^2},$$

welchem man nach Substitution des aus Gleichung 8) für v^2 zu entnehmenden Werthes auch die Form geben kann:

$$14)\ \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l^2}\left\{(l^2 - z^2)\left(\frac{v_0^2}{2g} + z - z_0\right) - \frac{v_0^2}{2g} r_0^2\right\}.$$

Wenn man hierin abkürzungsweise die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v_0^2}{2g} = h$ setzt und ausserdem berücksichtigt, dass $r_0^2 = l^2 - z_0^2$ ist, so kann man aus der vorigen noch die folgende Gleichung ableiten:

$$15)\ \frac{l^2}{2g}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (h - z_0 + z)\,(l^2 - z^2) - h(l^2 - z_0^2),\ \text{oder:}$$

$$16)\ \frac{l^2}{2g}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (z_0 - z)\left\{(hz_0 - l^2) + hz + z^2\right\}.$$

An dieser letzeren Gleichung erkennt man: dass es ausser dem Werthe $z = z_0$ noch einen zweiten Werth $z = z_1$ giebt, für welchen $\frac{dz}{dt} = 0$ wird. Man findet denselben, indem man den zweiten Factor des auf der rechten Seite stehenden Productes gleich Null setzt, aus der Gleichung:

$$17)\ z_1^2 + hz_1 = l^2 - hz_0,\ \text{oder:}\ z_1 = -\frac{h}{2} + \sqrt{l^2 - hz_0 + \frac{h^2}{4}}.$$

Die Grössen z_0 und z_1 bilden die Grenzwerthe, zwischen welchen die Coordinate z sich ändert, und je nach der Grösse von h wird der eine oder der andere dieser beiden Grenzwerthe der grössere von beiden sein. Es wird nämlich:

$$z_1 = z_0,\ \text{wenn}\ h = \frac{l^2 - z_0^2}{2z_0}\ \text{ist},$$

$$z_1 < z_0,\ \text{„}\ h > \frac{l^2 - z_0^2}{2z_0}\ \text{„}$$

$$z_1 > z_0,\ \text{„}\ h < \frac{l^2 - z_0^2}{2z_0}\ \text{„}.$$

Dem ersteren dieser drei Fälle entspricht eine Anfangsgeschwindigkeit von der Grösse:

$$18)\ v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\left(\frac{l^2 - z_0^2}{2z_0}\right)} = r_0 \sqrt{\frac{g}{z_0}}.$$

Bei dieser Grösse der horizontalen Anfangsgeschwindigkeit fallen di beiden Grenzwerthe zusammen, und der materielle Punkt beschreib eine horizontale Kreislinie vom Halbmesser r_0 mit der constante Geschwindigkeit v_0. Die Umlaufszeit t ist zu bestimmen (wie i § 54) aus der Gleichung:

$$19)\quad v_0 t = 2 r_0 \pi, \text{ oder: } t = 2\pi \frac{r_0}{v_0} = 2\pi \sqrt{\frac{z_0}{g}}.$$

§ 57.

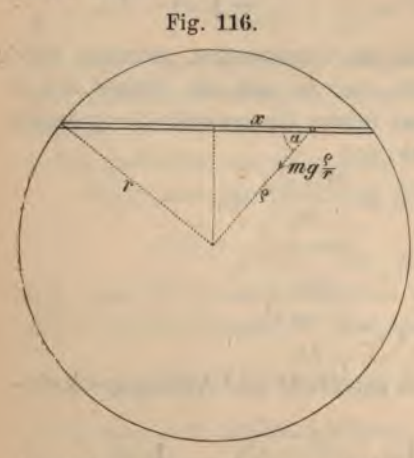
Bewegung eines materiellen Punktes längs der Sehne einer homogenen Kugel.

Wenn man sich durch die Erdkugel einen geradlinigen Tunne gebohrt denkt, so würde ein diesen Tunnel ohne Widerstand durchlaufender Eisenbahnwagen annäherungsweise betrachtet werden können als ein materieller Punkt, welchem eine Sehne der Erdkuge als Bahnlinie vorgeschrieben ist. Nach § 45 ändert sich im Innere einer homogenen Kugel die Gravitationskraft proportional dem Abstande vom Mittelpunkte. Wenn also die Erde als eine homogen Kugel betrachtet werden dürfte, so würde nach Fig. **116** die Bewegung des materiellen Punktes zu bestimmen sein aus der Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \frac{\rho}{r} \cos \alpha,$$

welcher man nach Substitution des Werthes $\rho \cos \alpha = x$, indem ma zugleich die Constante $\sqrt{\frac{g}{r}} = k$ setzt, auch die folgenden Forme geben kann:

Fig. 116.



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{r}\, x, \text{ oder}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x.$$

Die letztere Gleichung stimm überein mit der in § 35 für di geradlinig schwingende Bewegun gefundenen Differenzialgleichung und die Dauer einer Schwingun hat nach § 35 die Grösse:

$$t = \frac{\pi}{k} = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Wenn der Anfangspunkt de Bewegung mit einem Endpunkt der Sehne zusammenfiel, und die Anfangsgeschwindigkeit gleich Nul

war, so ergiebt sich für die Zeit, in welcher der materielle Punkt die ganze Länge der Sehne durchläuft, der Werth:

$$t = 3{,}14 \sqrt{\frac{6370000}{9{,}8}} = 2532 \text{ Secunden.}$$

Die Dauer der Bewegung ist also unabhängig von der Lage der Sehne und hat dieselbe Grösse, welche in § 35 für die Dauer der Bewegung längs des Erddurchmessers gefunden wurde. Nach den oben gemachten Voraussetzungen ergiebt sich hieraus der folgende Satz:

Alle Sehnen einer homogenen Kugel werden in gleichen Zeiten durchlaufen.

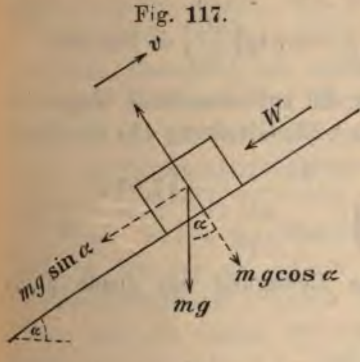
In einer homogenen Kugel von der Grösse und Masse der Erde beträgt die Dauer der Bewegung stets 2532 Secunden, oder 42 Minuten und 12 Secunden.

§ 58.

Bewegung auf geneigter Bahn unter Einwirkung des Luftwiderstandes.

Die in § 33 für die steigende und sinkende Bewegung eines Körpers in atmosphärischer Luft gefundenen Gleichungen können auch angewendet werden auf die Bewegung eines ohne Reibung längs einer um den Winkel α geneigten Bahn gleitenden Körpers, wenn darin die Grösse g vertauscht wird mit der Grösse:

Fig. 117.



$$1)\quad \mathfrak{g} = g \sin \alpha$$

und dem entsprechend die Grösse k mit der Grösse $\mathfrak{k}$, als derjenigen Grösse der Geschwindigkeit v, bei welcher der Luftwiderstand W die Grösse $m\mathfrak{g}$ erreichen würde (Fig. 117). Für diese Geschwindigkeitsgrösse ergeben sich nach § 33 die Gleichungen:

$$2)\quad \frac{W}{m\mathfrak{g}} = \frac{v^2}{\mathfrak{k}^2}, \qquad 3)\quad \frac{W}{mg} = \frac{v^2}{k^2},$$

$$4)\quad \frac{\mathfrak{k}}{k} = \sqrt{\frac{\mathfrak{g}}{g}} = \sqrt{\sin \alpha}.$$

Die Geschwindigkeit k, mit welcher ein 14000 kg wiegender Eisenbahnwagen vom Querschnitte $F = 4^{\square m}$ sich bewegen müsste,

wenn der Luftwiderstand gleich seinem Gewichte sein sollte, kann man nach der Gleichung 32) des § 33 berechnen, indem man darin $v = k$, $W = 14000$, $\gamma = 1,293$, und (entsprechend der Form des Wagens) den Widerstandscoefficienten $\zeta = \frac{4}{3}$ setzt; man erhält dann die Gleichung:

$$5)\quad 14000 = \frac{4}{3} \cdot 1,293 \,.\, 4 \cdot \frac{k^2}{2 \,.\, 9,8}, \text{ oder } k = 200^m.$$

Wenn dieser Wagen auf einer Bahn vom Steigungsverhältnis $\sin \alpha = 0,01$ sich bewegte, so würde (nach Gleichung 4) der Luftwiderstand gleich der bergab gerichteten Seitenkraft des Gewichts werden bei der Geschwindigkeit:

$$6)\quad \mathfrak{k} = k \sqrt{\sin \alpha} = 200 \sqrt{0,01} = 20^m.$$

Für die Strecke s, welche der bergan laufende Wagen auf dieser Bahn noch zurücklegt, bis seine Geschwindigkeit gleich Null wird, erhält man (nach § 33, Gleichung 9), wenn die Anfangsgeschwindigkeit $\mathfrak{c} = 40^m$ angenommen wird, den Werth:

$$7)\quad s = \frac{\mathfrak{k}^2}{2\mathfrak{g}} \lg\left(1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{k}^2}\right) = \frac{20^2}{2 \,.\, 9,8 \,.\, 0,01} \cdot \lg\left(1 + \frac{40^2}{20^2}\right) = 3283,^m2$$

Für die Dauer dieser Bewegung erhält man (nach § 33, Gleichung 21) den Werth:

$$8)\quad T = \frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{g}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{k}}\right) = \frac{20}{9,8 \,.\, 0,01} \cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{40}{20}\right) = 226 \text{ Sek.}$$

Die Endgeschwindigkeit, mit welcher der zurücklaufende Wagen den Abgangsort wieder erreicht, hat (nach § 33, Gleichung 15) die Grösse:

$$9)\quad V = \frac{\mathfrak{c}}{\sqrt{1 + \frac{\mathfrak{c}^2}{\mathfrak{k}^2}}} = \frac{40}{\sqrt{1 + \frac{40^2}{20^2}}} = 17,^m89,$$

und die Dauer dieser rückläufigen Bewegung hat (nach § 33, Gleichung 31) die Grösse:

$$10)\quad t = \frac{\mathfrak{k}}{\mathfrak{g}} \lg\left[e^{\frac{\mathfrak{g}s}{\mathfrak{k}^2}} + \sqrt{e^{\frac{2\mathfrak{g}s}{\mathfrak{k}^2}} - 1}\right] = 294,4 \text{ Sek.}$$

Capitel X.

Relative Bewegung des materiellen Punktes.

§ 59.

Die zwei scheinbaren Kräfte der relativen Bewegung.

Wenn ein materieller Punkt eine bestimmte Bewegung ausführt längs einer Bahnlinie, welche ihrerseits einem in Bewegung begriffenen Raume oder Körper angehörend gleichzeitig eine zweite Bewegung ausführt, so nennt man — wie in § 22 bereits erklärt wurde — jene erste Bewegung die relative Bewegung des materiellen Punktes in Bezug auf jenen Raum oder auch die scheinbare Bewegung, insofern dieselbe einem an der Bewegung des Raumes theilnehmenden, aber von seiner Bewegung Nichts merkenden Beobachter als die wirkliche Bewegung erscheinen würde. In § 25 wurde gezeigt, wie man die Beschleunigung der wirklichen Bewegung des materiellen Punktes stets als Resultirende von drei Beschleunigungen p_1, p_2, p_3 darstellen kann, von denen die eine p_1 die Beschleunigung der relativen Bewegung ist, und die beiden anderen p_2, p_3 aus der relativen Geschwindigkeit und der gegebenen Bewegung des Raumes ihrer Grösse und Richtung nach bestimmt werden können. Es wurde dort zugleich gezeigt, wie man die umgekehrte Aufgabe lösen kann, nämlich aus der gegebenen wirklichen Bewegung des materiellen Punktes und der gleichfalls gegebenen Bewegung des Raumes die relative Beschleunigung zu berechnen als Resultirende von der wahren Beschleunigung p und den in entgegengesetzten Richtungen genommenen beiden Beschleunigungen p_2 und p_3.

Wenn mit m die Masse des materiellen Punktes bezeichnet wird, so ist mp die Grösse derjenigen Kraft, welche demselben eine Beschleunigung p gleich der wahren Beschleunigung ertheilen würde, also die Grösse der wirklichen Kraft, welche auf den materiellen Punkt wirkt. In gleicher Weise stellen die Producte mp_1, mp_2, mp_3 die Grössen der Kräfte dar, welche dem materiellen Punkte resp. die Beschleunigungen p_1, p_2, p_3 ertheilen würden. Da die Resultirende von drei Kräften nach denselben Regeln zu bestimmen ist wie die Resultirende von drei Beschleunigungen, so ist es nur nöthig, das in § 25 in Bezug auf die Beschleunigungen erklärte Verfahren hier anzuwenden auf die jenen Beschleunigungen

entsprechenden Kräfte, um nunmehr auch die Kraft mp_1, als diejenige Kraft, unter deren alleiniger Einwirkung der materielle Punkt im ruhenden Raume eine mit der relativen Bewegung genau übereinstimmende Bewegung ausführen würde, darstellen zu können als Resultirende von drei Kräften mp, mp_2, mp_3, deren Grössen und Richtungen auf folgende Weise zu bestimmen sind.

Die erste Kraft mp ist die als gegeben zu betrachtende wirkliche Kraft, oder die Mittelkraft von denjenigen Kräften, welche in Wirklichkeit auf den materiellen Punkt wirken.

Die zweite Kraft mp_2 entspricht — was ihre Grösse betrifft — der Beschleunigung derjenigen Stelle des bewegten Raumes, welche der materielle Punkt in dem betreffenden Augenblicke gerade einnimmt, und — was ihre Richtung betrifft — so ist sie der Richtung jener Beschleunigung entgegengesetzt.

Die dritte Kraft mp_3 ist rechtwinkelig zu derjenigen Ebene gerichtet, welche das relative Bahnelement und die durch den Anfangspunkt desselben zu legende augenblickliche Drehachse des bewegten Raumes enthält, und ist dem Sinne der Drehbewegung entgegengesetzt. Ihrer Grösse nach entspricht sie der Beschleunigung p_3, welche in § 25 definirt wurde als das doppelte Product aus der relativen Geschwindigkeit, der Drehgeschwindigkeit des Raumes um jene augenblickliche Drehachse und dem Sinus des Winkels, welchen das relative Bahnelement mit der augenblicklichen Drehachse einschliesst. Nach der in § 25 gewählten Bezeichnung ist also:

$$mp_3 = 2m\omega v \sin \alpha.$$

Wenn in dem ruhenden Raume der materielle Punkt eine Bewegung ausführen sollte, welche genau übereinstimmt mit der gesuchten relativen Bewegung, so müssten ausser der wirklich vorhandenen Kraft mp noch die beiden Kräfte mp_2 und mp_3 wirken. Einem an der Bewegung des Raumes theilnehmenden, aber von seiner Bewegung Nichts merkenden Beobachter würde es daher so vorkommen, als ob ausser der wirklichen Kraft noch jene zwei anderen Kräfte auf den materiellen Punkt wirkten. Deshalb nennt man jene beiden hinzuzufügenden Kräfte mp_2 und mp_3 die zwei scheinbaren Kräfte der relativen Bewegung.

Es ergiebt sich hieraus für die Bestimmung der relativen Bewegung eines materiellen Punktes in Bezug auf einen Raum, dessen Bewegung gegeben ist, die folgende Regel:

Man füge zu den wirklichen Kräften, welche auf den mate-

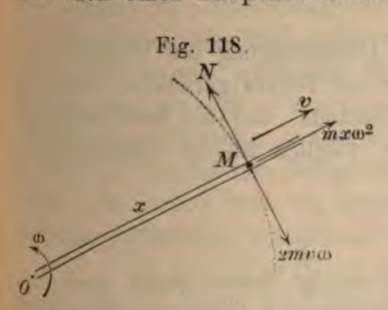
riellen Punkt wirken, noch die oben definirten zwei scheinbaren Kräfte hinzu und bestimme nunmehr, ohne auf die Bewegung jenes Raumes weiter Rücksicht zu nehmen, die Bewegung, welche der materielle Punkt unter Einwirkung aller dieser Kräfte ausführen würde. Die auf solche Weise gefundene Bewegung ist die gesuchte relative Bewegung.

§ 60.

Bewegung einer Kugel in einem geradlinigen Rohre, welches um eine rechtwinkelig zu seiner Achse gerichtete Drehachse gleichförmig sich dreht.

Die Bewegung einer Kugel in einem geradlinigen Rohre kann annäherungsweise behandelt werden wie die Bewegung eines materiellen Punktes, welchem eine gerade Linie als Bahn vorgeschrieben ist. Wenn das Rohr selbst gleichzeitig eine gleichförmige Drehbewegung ausführt um eine rechtwinkelig zu seiner Achsenlinie durch den einen Endpunkt derselben gelegte Drehachse, so ist die Bewegung der Kugel längs der Achsenlinie des Rohres aufzufassen als relative Bewegung eines materiellen Punktes in Bezug auf einen Raum, welcher eben dieselbe Drehbewegung ausführt (Fig. 118.)

Fig. 118.



Es soll angenommen werden, dass der normal zur Achse des Rohres gerichtete Gegendruck der inneren Wandfläche desselben die einzige Kraft ist, welche auf die Kugel wirkt. Nach der im vorigen Paragraphen gefundenen Regel hat man zu dieser wahren Kraft N noch die beiden scheinbaren Kräfte der relativen Bewegung hinzuzufügen und alsdann die Bewegung der Kugel so zu bestimmen, wie wenn das Rohr im Ruhestande sich befände.

Die erste der beiden scheinbaren Kräfte entspricht der Beschleunigung der Stelle des Rohres, an welcher die Kugel sich befindet, und ihre Richtung ist dieser Beschleunigung entgegengesetzt. Der Punkt M des Rohres bewegt sich gleichförmig längs der Peripherie eines Kreises vom Halbmesser x mit der Geschwindigkeit $x\omega$. Die Beschleunigung dieses Punktes ist (nach § 6) die nach dem Drehungsmittelpunkte gerichtete Centripetalbeschleu-

nigung und hat die Grösse $x\omega^2$. Es ist daher die erste scheinbare Kraft gleich $mx\omega^2$ und dieselbe wirkt in der Richtung des Drehungshalbmessers OM nach aussen hin. Diese Kraft wird die Centrifugalkraft genannt.

Die zweite scheinbare Kraft ist rechtwinkelig zu der Ebene gerichtet, welche das mit der Achsenrichtung des Rohres zusammenfallende relative Bahnelement und die durch den Punkt M gelegte augenblickliche Drehachse enthält (vergl. § 25, Fig. 70). Dieselbe ist also tangential zum Drehungskreise gerichtet und zwar dem Sinne der Drehbewegung entgegengesetzt. Ihre Grösse beträgt nach der im vorigen Paragraphen gegebenen Erklärung $2mv\omega$. (Diese zweite scheinbare Kraft wird von Einigen die „zusammengesetzte Centrifugalkraft" genannt.)

Da die Kugel durch den Normaldruck N verhindert wird, das Rohr zu verlassen, so muss derselbe mit der zweiten scheinbaren Kraft gleiche Grösse und entgegengesetzte Richtung haben. Folglich hat dieser Normaldruck die Grösse:

$$1)\quad N = 2mv\omega$$

und derselbe wirkt im Sinne der Drehbewegung des Rohres.

Die Kugel bewegt sich längs des Rohres gerade so, wie wenn das Rohr im Ruhezustande sich befände, und die beschleunigende Kraft $mx\omega^2$ auf dieselbe wirkte; folglich ist die Beschleunigung dieser Bewegung:

$$2)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x.$$

Die relative Bewegung der Kugel erfolgt daher genau nach demselben Gesetze, wie die in § 36 untersuchte Bewegung eines materiellen Punktes unter Einwirkung einer dem Abstande von einem festen Punkte proportionalen abstossenden Kraft. Man erhält also, indem man den Buchstaben k in den dort gefundenen Gleichungen mit dem Buchstaben ω vertauscht, für die zurückgelegte Wegeslänge und die Geschwindigkeit der relativen Bewegung resp. die allgemeinen Gleichungen:

$$3)\quad x = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0}{\omega}\right)e^{+\omega t} + \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0}{\omega}\right)e^{-\omega t},$$

$$4)\quad v = \frac{1}{2}(x_0\omega + v_0)e^{+\omega t} - \frac{1}{2}(x_0\omega - v_0)e^{-\omega t}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen würde man durch Elimination der Zeit t eine Gleichung ableiten können, welche v als Function von x darstellt. Man kann statt dessen auch auf directem Wege eine

solche Gleichung ableiten, entweder indem man das in § 47 bewiesene Princip der lebendigen Kraft auf die relative Bewegung der Kugel anwendet oder auch, indem man Gleichung 2) auf beiden Seiten mit $2dx$ multiplicirt und dann integrirt. Auf letzterem Wege gelangt man zu den Gleichungen:

$$5)\ 2\frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right) = 2\omega^2 x dx,$$

$$6)\ \int_{v_0}^{v} 2v dv = \omega^2 \int_{x_0}^{x} 2x dx,$$

$$7)\ v^2 - v_0^2 = x^2\omega^2 - x_0^2\omega^2.$$

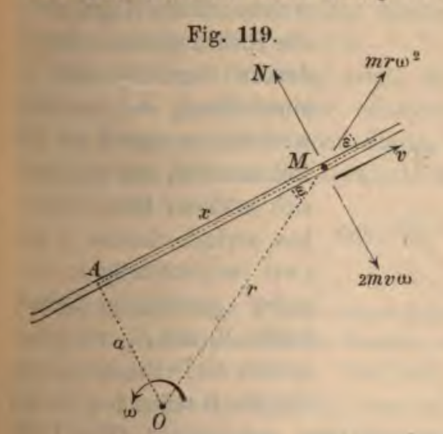
Wenn zufällig $v_0 = x_0\omega$ war, so wird $v = x\omega$, und wenn zugleich x die ganze Länge des Rohres wäre, so würde die Kugel mit der absoluten Geschwindigkeit $x\omega . \sqrt{2}$ die Mundung verlassen und sich geradlinig und gleichförmig mit dieser Geschwindigkeit weiter bewegen.

Die hier unter Voraussetzung einer nach aussen gerichteten relativen Bewegung abgeleiteten Gleichungen gelten auch für negative Werthe der Geschwindigkeit v, d. h. für den Fall, in welchem die Kugel nach dem Drehpunkte hin sich bewegt, in welchem Falle sowohl die zweite scheinbare Kraft, als auch der dieselbe aufhebende Normaldruck N einen negativen Werth erhalten, d. h. entgegengesetzte Richtung annehmen würde. Sollte bei einer solchen nach innen gerichteten Bewegung $v = 0$ werden in dem Augenblicke, wo $x = 0$ wird, so müsste die Anfangsgeschwindigkeit der Bedingungsgleichung entsprechen:

$$8)\ 0 - v_0^2 = 0 - x_0^2\omega^2, \text{ oder: } v_0 = -x_0\omega.$$

Wenn also die nach dem Drehpunkte hin gerichtete relative Anfangsgeschwindigkeit gleiche Grösse hatte mit der Periphериegeschwindigkeit des Anfangspunktes, so wird die Kugel den Drehpunkt gerade noch erreichen und zwar mit der Endgeschwindigkeit Null, folglich im Ruhezustande daselbst verbleiben,

Fig. 119.



Wenn der Drehpunkt ausserhalb der Rohrachse liegt, so ergeben sich für die zwei scheinbaren Kräfte die in Fig. 119 angegebenen

Grössen und Richtungen. Für den Normaldruck N erhält man in diesem Falle die Gleichung:

9) $N + mr\omega^2 \sin\varepsilon = 2mv\omega$, oder: $N = 2mv\omega - ma\omega^2$,

aus welcher man erkennt, dass derselbe gleich Null wird in dem Augenblicke, wo $v = \frac{a\omega}{2}$ wird, und negativ ist, so lange $v < \frac{a\omega}{2}$ ist.

Für die Beschleunigung der relativen Bewegung ergiebt sich die Gleichung:

$$10)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{mr\omega^2 \cos\varepsilon}{m} = \omega^2 x.$$

Diese Gleichung stimmt überein mit der für den vorigen Fall gefundenen Gleichung 2). Es erfolgt daher die relative Bewegung nach denselben Gesetzen, welche für den in Fig. **118** dargestellten Fall in den Gleichungen 2) bis 8) gefunden wurden. Da $r^2 = x^2 + a^2$ ist, so kann man der Gleichung 7) für diesen Fall auch die Form geben:

$$11)\quad v^2 - v_0^2 = r^2\omega^2 - r_0^2\omega^2.$$

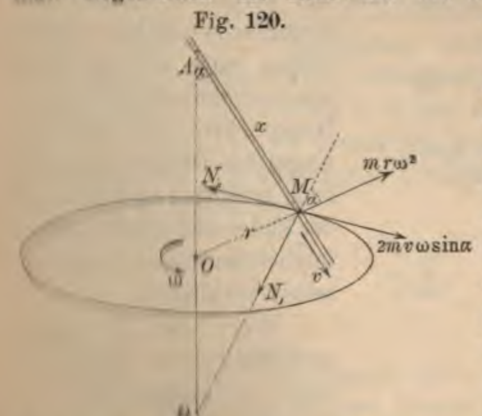
Es ist also bei der Bewegung der Kugel von einem Punkte des Rohres zu einem anderen die Zunahme des Quadrates der relativen Geschwindigkeit stets gleich der Differenz der Quadrate der Peripheriegeschwindigkeiten dieser beiden Punkte.

§ 61.

Bewegung einer Kugel in einem geradlinigen Rohre, welches um eine die Achse desselben spitzwinkelig schneidende Drehachse gleichförmig sich dreht.

Es soll auch hier wieder vorausgesetzt werden, dass der normale Gegendruck der Rohrwand die einzige wirkliche Kraft ist, welche auf die Kugel wirkt. Die Richtung dieses Gegendrucks liegt jedenfalls in einer Ebene, welche rechtwinkelig zu der Achse des Rohres steht, und man kann sich in dieser Ebene denselben zerlegt denken in die zwei rechtwinkelig zu einander gerichteten Seitenkräfte N_1 und N_2, von denen erstere die Drehachse in dem Punkte B schneidet, und die letztere tangential zu dem Drehungskreise gerichtet ist (Fig. **120**).

Fig. 120.



Nach Hinzufügung der beiden in der Figur angegebenen scheinbaren Kräfte $mr\omega^2$ und $2mv\omega \sin\alpha$ findet man für jene beiden Seitenkräfte die Werthe:

$$N_1 = mr\omega^2 \cos\alpha,$$
$$N_2 = 2mv\omega \sin\alpha,$$

und für die Beschleunigung der relativen Bewegung erhält man die Gleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{mr\omega^2 \sin\alpha}{m},$$

welche nach Substitution des Werthes $r = x \sin\alpha$ die Form annimmt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (\omega \sin\alpha)^2 x.$$

Wenn man diese Gleichung mit der im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichung 2) vergleicht, so erkennt man, dass es nur nöthig ist, in den dort gefundenen Gleichungen überall den constanten Factor ω zu vertauschen mit der gleichfalls constanten Grösse $\omega \sin\alpha$, um die Bewegungsgleichungen für den vorliegenden Fall zu erhalten. Die Gleichungen 3), 4), 7) des vorigen Paragraphen nehmen alsdann die folgenden Formen an:

$$x = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0}{\omega \sin\alpha}\right)e^{+\omega \sin\alpha . t} + \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{v_0}{\omega \sin\alpha}\right)e^{-\omega \sin\alpha . t},$$

$$v = \frac{1}{2}(x_0\, \omega \sin\alpha + v_0)e^{+\omega \sin\alpha . t} - \frac{1}{2}(x_0\, \omega \sin\alpha - v_0)e^{-\omega \sin\alpha . t},$$

$$v^2 - v_0^2 = (x^2 - x_0^2)\, \omega^2 \sin\alpha^2 = (r^2 - r_0^2)\, \omega^2.$$

Auch diese Gleichungen gelten sowohl für negative als für positive Werthe der Geschwindigkeit v.

Die letztere Gleichung zeigt, dass auch in diesem Falle die Zunahme des Quadrates der relativen Geschwindigkeit der Kugel bei der Bewegung von einer Stelle des Rohres zur anderen stets gleich ist der Differenz der Quadrate der Peripheriegeschwindigkeiten dieser beiden Stellen.

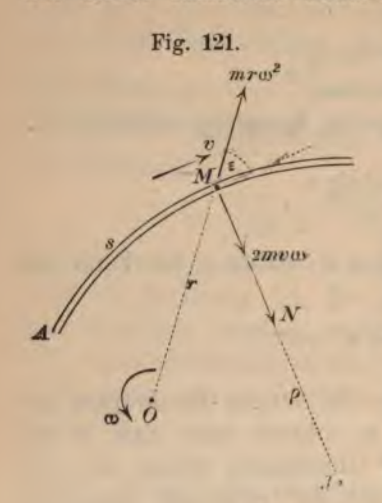
§ 62.

Bewegung einer Kugel in einem krummlinigen Rohre, welches um eine rechtwinkelig zur Krümmungsebene desselben stehende Drehachse gleichförmig sich dreht.

Für die hinzuzufügenden zwei scheinbaren Kräfte ergeben sich auf dieselbe Weise wie bei den in § 60 und § 61 behandelten

beiden Fällen die in Fig. 121 angegebenen Grössen und Richtungen. Die zweite scheinbare Kraft fällt in die Richtung der Normalen zur relativen Bahnlinie und wirkt, wenn ω und v beide positiv sind, in der Richtung nach dem Krümmungsmittelpunkte J hin. Da die Mittelkraft von den bei rechtwinkeliger Zerlegung der Kräfte in die Richtung der Normalen fallenden Seitenkräften die Centripetalkraft bilden muss, welche die Centripetalbeschleunigung $\frac{v^2}{\rho}$ der relativen Bewegung hervorbringt, so ergiebt sich für den von aussen nach innen gerichteten normalen Gegendruck N der Rohrwand die Gleichung:

Fig. 121.



$$N + 2mv\omega - mr\omega^2 \sin\varepsilon = \frac{mv^2}{\rho}, \text{ oder:}$$

$$1)\quad N = \frac{mv^2}{\rho} + mr\omega^2 \sin\varepsilon - 2mv\omega.$$

Wenn aus dieser Gleichung ein negativer Werth für N sich ergeben sollte, so würde hieraus zu schliessen sein, dass der Druck der Rohrwand gegen die Kugel in der Richtung des Krümmungshalbmessers nicht nach innen, sondern nach aussen hin wirkt, dass also nicht die nach aussen hin convexe, sondern die dem Krümmungsmittelpunkte zugewendete nach aussen concave Wandseite es ist, welche diesen Gegendruck zu leisten hat. Um zu erfahren, wann der eine oder der andere von diesen beiden Fällen eintritt, würde man zu untersuchen haben, wann der Grenz- und Uebergangsfall eintritt, in welchem der Normaldruck gleich Null wird. Man erhält für diesen letzteren Fall, indem man den obigen Ausdruck gleich Null setzt, die Bedingungsgleichung:

$$2)\quad 0 = \frac{v^2}{\rho} + r\omega^2 \sin\varepsilon - 2v\omega.$$

Durch Auflösung dieser (in Bezug auf die Grösse v) quadratischen Gleichung erhält man für v den Ausdruck:

$$3)\quad v = \rho\omega \pm \sqrt{\rho^2\omega^2 - \rho r\omega^2 \sin\varepsilon},$$

welcher zeigt, dass es für eine bestimmte gegebene Stelle des Rohres im Allgemeinen immer zwei verschiedene Geschwindigkeits-

grössen giebt, für welche der Normaldruck gleich Null wird. Falls — wie hier vorausgesetzt werden soll — die Grössen ρ, ω, r, ε sämmtlich positiv sind, so tritt der Fall, in welchem N negativ wird, dann ein, wenn die Grösse von v zwischen den obigen beiden Werthen liegt. Es wird dagegen N positiv, sobald v entweder grösser als der obere (dem Pluszeichen entsprechende) oder kleiner als der untere (dem Minuszeichen entsprechende) von jenen beiden Grenzwerthen ist.

Die Tangentialbeschleunigung der relativen Bewegung ist nach Fig. 121 zu bestimmen aus der Gleichung:

$$4)\quad \frac{dv}{dt} = r\omega^2 \cos\varepsilon.$$

Wenn man diese Gleichung auf beiden Seiten mit $2ds$ multiplicirt und dann integrirt — indem man zugleich berücksichtigt, dass $\frac{ds}{dt} = v$ und $ds\cos\varepsilon = dr$ ist — so gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

$$2\frac{ds}{dt}dv = \omega^2 . 2r\,ds\cos\varepsilon, \qquad \int_{v_0}^{v} 2v\,dv = \omega^2 \int_{r_0}^{r} 2r\,dr,$$

$$5)\quad v^2 - v_0^2 = \omega^2 (r^2 - r_0^2).$$

Die letztere Gleichung zeigt, dass auch bei krummliniger Form des Rohres die Zunahme des Quadrates der relativen Geschwindigkeit der Kugel bei der Bewegung von einer Stelle des Rohres zur anderen stets gleich ist der Differenz der Quadrate der Peripheriegeschwindigkeiten dieser beiden Stellen. Die wirkliche (absolute) Geschwindigkeit w ist die Resultirende aus der relativen Geschwindigkeit v und der Geschwindigkeit $r\omega$, mit welcher die Stelle M des Rohres sich bewegt. Es ist also (nach Fig. 121):

$$w^2 = (v\cos\varepsilon)^2 + (v\sin\varepsilon - r\omega)^2, \text{ oder:}$$

$$6)\quad w^2 = v^2 + r^2\omega^2 - 2v\,r\,\omega\sin\varepsilon.$$

Denkt man sich die Krümmung des Rohres so beschaffen, dass für alle Stellen desselben die Bedingungsgleichung 2) erfüllt ist — dass also die wahre auf die Kugel wirkende Kraft beständig gleich Null ist — so erhält man als Achsenlinie des Rohres diejenige relative Bahnlinie, welche die Kugel beschreiben würde, wenn das Rohr gar nicht vorhanden wäre, und die Kugel demnach ausschliesslich unter Einwirkung der beiden scheinbaren Kräfte ihre relative Bewegung ausführte. Die wahre Bewegung wird in diesem

Falle eine geradlinige gleichförmige, also die Grösse w eine constante Grösse sein müssen.

Wenn zugleich der Anfangspunkt der relativen Bahnlinie mit dem Drehpunkte O zusammenfällt, wie hier vorausgesetzt werden soll, so wird nach Gleichung 5):

$$7) \quad v^2 = v_0^2 + r^2 \omega^2,$$

und die wahre Geschwindigkeit w wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 der relativen Bewegung übereinstimmen. Nach Substitution dieser beiden Werthe nimmt Gleichung 6) die Form an:

$$8) \quad v \sin \varepsilon = r \omega,$$

und wenn man den aus dieser Gleichung für $\sin \varepsilon$ sich ergebenden Werth in Gleichung 2) substituirt, so liefert dieselbe für den Krümmungshalbmesser ϱ den Ausdruck:

$$9) \quad \varrho = \frac{v^3}{2 v^2 \omega - r^2 \omega^3} = \frac{(v_0^2 + r^2 \omega^2)^{\frac{3}{2}}}{\omega (2 v_0^2 + r^2 \omega^2)}.$$

Nach Fig. 122 und Gleichung 8) wird in diesem Falle zugleich:

Fig. 122.

$$10) \quad v \sin \varepsilon = r \frac{d\theta}{dt} = r \omega,$$

$$\text{also: } \frac{d\theta}{dt} = \omega,$$

und da hiernach die wahre Geschwindigkeit $w = v_0$ mit der Richtung des Radiusvector OM zusammenfällt, so ist:

$$11) \quad \frac{dr}{dt} = v_0.$$

Es ergiebt sich also für die relative Bewegung genau dasselbe Gesetz, welches bereits früher in § 23 für die relative Bewegung eines den Durchmesser eines Kreises gleichförmig durchlaufenden Punktes in Bezug auf einen gleichförmig um die Achse des Kreises sich drehenden Raum gefunden wurde.

§ 63.

Bewegung eines materiellen Punktes längs des Meridianes der Erdoberfläche.

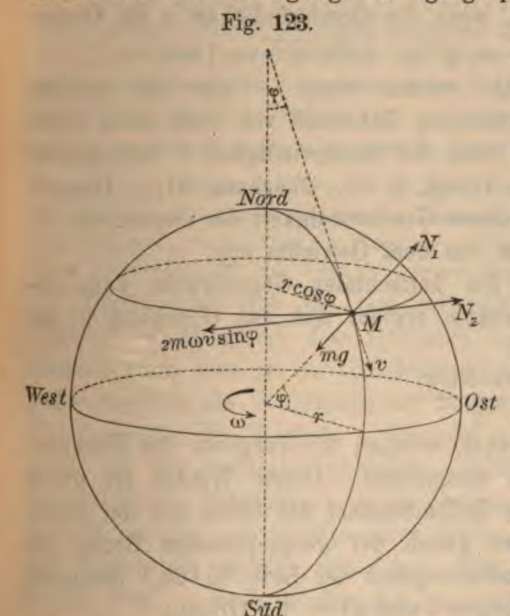
Wenn man sich unter der in Fig. 71 dargestellten Kugel die um ihre Achse sich drehende Erdkugel denkt, so würde man, um die Bedingungen für die Bewegung eines materiellen Punktes längs des Erdmeridianes aufzufinden, die den beiden dort angegebenen

Beschleunigungen p_2 und p_3 entsprechenden Kräfte in entgegengesetztem Sinne genommen zu den wirklich vorhandenen Kräften hinzuzufügen haben und alsdann die Bewegung des materiellen Punktes so zu bestimmen haben, wie wenn die Drehbewegung der Erde nicht stattfände.

Es soll angenommen werden, dass die Schwerkraft und der Gegendruck einer mit dem Erdmeridiane zusammenfallenden vorgeschriebenen relativen Bahnlinie die einzigen wirklichen Kräfte sind, welche auf den materiellen Punkt wirken — wie es z. B. annäherungsweise bei der Bewegung einer Kugel der Fall sein würde in einem Rohre, dessen Achsenlinie mit dem Meridiane zusammenfallend an der Drehbewegung der Erde theilnimmt. Zu diesen beiden wirklich vorhandenen Kräften würde man nach der in § 59 entwickelten Regel jene zwei scheinbaren Kräfte noch hinzuzufügen haben, wenn nicht aus besonderen Gründen im vorliegenden Falle die Zahl dieser hinzuzufügenden Kräfte auf Eine zu reduciren wäre.

Es würde nämlich hier als die erste der beiden scheinbaren Kräfte die der Bewegung des geographischen Ortes längs des Parallelkreises entsprechende, in der Richtung des Parallelkreishalbmessers nach aussen hin wirkende Centrifugalkraft $mr \cos \varphi \, . \, \omega^2$ in Rechnung zu bringen sein. Da aber in Demjenigen, was man im gewöhnlichen Leben die Schwerkraft nennt, bereits die Umdrehung der Erde ihren Einfluss geltend gemacht hat, und das sogenannte Gewicht eines an der Erdoberfläche befindlichen Körpers schon anzusehen ist als die Mittelkraft aus der von der Erde auf den Körper ausgeübten Anziehungskraft und jener Centrifugalkraft, so würde man die erste der beiden scheinbaren Kräfte zweimal

Fig. 123.



in Rechnung bringen, wenn man dieselbe bei der Auflösung der vorliegenden Aufgabe noch einmal hinzufügen wollte. Es ist daher in diesem Falle ausschliesslich die in Fig. **123** ihrer Grösse und Richtung nach angegebene zweite scheinbare Kraft $2m\omega v \sin\varphi$ zu den wirklich vorhandenen Kräften hinzuzufügen.

Den Normaldruck N kann man sich — auf ähnliche Weise wie schon in Fig. **120** gesehen — wieder in die zwei rechtwinkelig zu einander gerichteten Seitenkräfte N_1 und N_2 zerlegt denken, von denen die erste rechtwinkelig zur Erdoberfläche nach aussen hin und die zweite tangential zum Parallelkreise nach Osten gerichtet ist. Da der materielle Punkt nach den gemachten Voraussetzungen unter Einwirkung der vier in der Figur angegebenen Kräfte längs der Meridiankreislinie vom Halbmesser r mit der Geschwindigkeit v sich bewegen soll, so ergeben sich für jene beiden Gegendrücke die Gleichungen:

$$1)\quad mg - N_1 = \frac{mv^2}{r}, \quad \text{oder:} \quad N_1 = mg - \frac{mv^2}{r},$$

$$2)\quad N_2 = 2m\omega v \sin\varphi.$$

Die erste Gleichung zeigt, dass der vertical aufwärts gerichtete Gegendruck $N_1 = 0$ wird, wenn die Geschwindigkeit v die Grösse:

$$3)\quad v = \sqrt{gr} = \sqrt{9{,}8 \,.\, 6370000} = 7900^{\text{m}}$$

hat, und dass N_1 negativ werden würde — also der verticale Gegendruck der vorgeschriebenen Bahnlinie von oben nach unten gerichtet sein müsste — wenn die Geschwindigkeit v noch grösser wäre als 7900^{m} pro Sec. (vergl. § 42, Gleichung 31). Dagegen wird bei geringer Grösse dieser Geschwindigkeit der Gegendruck N_1 nur wenig verschieden sein von dem Gewichte mg.

Für das Verhältnis des horizontalen Gegendrucks zum Gewichte des materiellen Punktes ergiebt sich aus Gleichung 2) der Werth:

$$4)\quad \frac{N_2}{mg} = \frac{2v\omega \sin\varphi}{g}.$$

Hierin bedeutet φ den Winkel, welchen die Tangente des Meridiankreises mit der Erdachse einschliesst. Dieser Winkel ist gleich dem Winkel, welchen der Erdhalbmesser des Ortes mit der Ebene des Aequators bildet, also gleich der geographischen Breite des Ortes. Da ferner die Umdrehungszeit der Erde 86164,1 Secunden beträgt, so hat ihre Winkelgeschwindigkeit die Grösse:

$$5)\quad \omega = \frac{2\pi}{86164{,}1} = 0{,}00007292.$$

Hiernach kann die Verhältnisszahl $\frac{N_2}{mg}$ berechnet werden, sobald die relative Geschwindigkeit und die geographische Breite gegeben sind.

Wenn z. B. $\varphi = 50^0 46' 34''$ gesetzt wird (als geographische Breite der Stadt Aachen), so ist $\sin\varphi = 0{,}774681$, und wenn ferner $v = 15^m$ gesetzt wird (als Geschwindigkeit eines Eisenbahnzuges), so wird:

$$\frac{N_2}{mg} = \frac{2 \,.\, 15 \,.\, 0{,}00007292 \,.\, 0{,}774681}{9{,}8} = 0{,}00017275.$$

Es würde also bei einem in der Richtung von Norden nach Süden mit einer Geschwindigkeit von 15^m pro Sec. fahrenden Eisenbahnzuge, dessen Gewicht 100000 Kil. beträgt, die westliche Schiene einen in der Richtung nach Osten wirkenden Gegendruck von $17^{Kil.}{,}275$ zu leisten haben, d. h. es würde der Eisenbahnzug selbst gegen die westliche Schiene in der Richtung nach Westen hin mit einer Kraft von $17^{Kil.}{,}275$ drücken.

Wenn v negativ ist, so wird auch N_2 negativ. Es würde also bei einem in der Richtung von Süden nach Norden fahrenden Eisenbahnzuge jener Druck im entgegengesetzten Sinne wirken, d. h. es würde die östliche Schiene sein, welche den Druck aufnimmt. In beiden Fällen ist also für den vorwärts Fahrenden der Druck des Eisenbahnwagens gegen die Schienen von links nach rechts gerichtet.

Auf der südlichen Erdhälfte ist überall $\sin\varphi$ negativ. Folglich würde bei einem auf der südlichen Hemisphäre entweder in der Richtung von Süden nach Norden oder auch in der Richtung von Norden nach Süden fahrenden Eisenbahnzuge der Druck der Wagenräder gegen die Schienen stets in der Richtung von rechts nach links wirken.

Für $v = 600^m$ würde unter gleichen Umständen der Werth: $\frac{N_2}{mg} = 0{,}00691$ sich ergeben. Es würde also eine mit dieser Geschwindigkeit in der Richtung von Norden nach Süden abgefeuerte Kanonenkugel von 100 Kil. Gewicht in dem Momente, wo dieselbe die Mündung verlässt, einen nach Westen gerichteten Horizontaldruck von 0,691 Kil. gegen den Kanonenlauf ausüben.

Denkt man sich die Geschwindigkeit v so klein, dass der Gegendruck N_1 gleich dem Gewichte mg gesetzt werden darf, so erkennt man, dass der in Gleichung 4) gefundene Werth in diesem Falle zugleich als Verhältniss der beiden Gegendrücke N_2 und N_1 die Tangente des Winkels ε darstellt um welchen deren Mittelkraft von der Verticalen abweicht. Sollte diese Mittelkraft durch den normalen Gegendruck einer ebenen Unterstützungsfläche dargestellt werden, so müsste diese Ebene um den Winkel ε gegen die Horizontale geneigt sein, und zwar — wenn v und φ beide positiv sind — nach Westen hin ansteigend.

Für einen gleichförmig mit 15^m Fahrgeschwindigkeit nach Süden sich bewegenden Eisenbahnwagen würde bei der geographischen Breite $\varphi = 50^0 46' 34''$, wie oben gefunden, der Werth $\operatorname{tg}\varepsilon = 0{,}00017275$ sich ergeben, welchem die

Winkelgrösse $\varepsilon = 0^0 0' 35'',62$ entspricht. Um diesen Winkel müsste eine im Inneren des Eisenbahnwagens befindliche ebene Platte gegen die Horizontale geneigt sein, nach Westen hin ansteigend, wenn für eine auf derselben liegende Kugel die Bedingungen des relativen Gleichgewichts erfüllt sein sollen. Ein in dem Wagen hängendes Pendel würde in seiner relativen Gleichgewichtslage um den gleichen Winkel nach Westen hin von der Lothlinie abweichen.

Für eine Geschwindigkeit von 3 Metern pro Secunde würden unter gleichen Umständen die Werthe $\mathrm{tg}\,\varepsilon = 0,00003455$ und $\varepsilon = 0^0 0' 7'',13$ sich ergeben. Um diesen Winkel würde bei einem mit 3^m Geschwindigkeit von Norden nach Süden fliessenden Strome die Wasserfläche gegen die Horizontalebene geneigt sein, und zwar nach Westen hin ansteigend.

§ 64.

Ablenkung eines längs des Meridians sich bewegenden materiellen Punktes.

Denkt man sich bei dem in Fig. **123** dargestellten Falle der Bewegung eines materiellen Punktes längs des Erdmeridianes den horizontalen Gegendruck N_2 plötzlich aufhörend zu wirken, so erkennt man, dass in diesem Falle durch die nun nicht mehr aufgehobene zweite scheinbare Kraft $2mv\omega \sin\varphi$ eine seitliche Ablenkung von der Meridianlinie hervorgebracht werden muss. Es würde dem materiellen Punkte durch jene Kraft eine nach Westen gerichtete Beschleunigung ertheilt werden von der Grösse:

$$p = 2v\omega \sin\varphi.$$

Da die Winkelgeschwindigkeit ω sehr klein ist, so wird auch die Beschleunigung p als eine im Verhältniss zur relativen Geschwindigkeit v sehr kleine Grösse zu betrachten sein. Es wird daher bei nicht sehr langer Dauer der Bewegung angenommen werden dürfen, dass die in Folge jener seitlichen Beschleunigung eintretende Richtungsänderung der relativen Bewegung immer klein genug bleibt, um die Annahme zu rechtfertigen, dass die zweite scheinbare Kraft, welche stets rechtwinkelig zur relativen Bahnlinie gerichtet bleibt, beständig die ursprüngliche Richtung nach Westen hin beibehält, ebenso auch, dass die Grösse der relativen Geschwindigkeit nicht merklich durch dieselbe geändert wird. Diese seitliche Ablenkung darf daher als eine in constanter Richtung mit constanter Beschleunigung ausgeführte Bewegung betrachtet werden, welche mit der gleichförmigen Bewegung längs des Meridianes zu einer resultirenden Bewegung sich zusammensetzt. Die während der Zeit t in der Richtung nach Westen hin hervorgebrachte Ablenkung ist daher wie eine in gleichförmig beschleunigter Bewegung zurückgelegte Wegeslänge zu berechnen aus der Gleichung:

$$s = \frac{pt^2}{2}.$$

Wenn man z. B. an einem Orte, dessen geographische Breite $\varphi = 50^0 46' 34''$ ist, einen Körper auf vollkommen glatter horizontaler Ebene eine nach Süden gerichtete Anfangsgeschwindigkeit von der Grösse $v = 15^m$ ertheilte, so würde dieser Körper durch die Achsendrehung der Erde eine nach Westen gerichtete Beschleunigung erhalten von der Grösse:

$$p = 2 \,.\, 15 \,.\, 0{,}000\,072\,92 \,.\, 0{,}774\,681 = 0^m{,}001\,694\,7,$$

und die westliche Ablenkung vom Meridiane würde in 4 Secunden die Grösse erreichen:

$$s = \frac{0{,}001\,694 \,.\, 4^2}{2} = 0^m{,}013\,557\,6.$$

Für eine mit der horizontalen Anfangsgeschwindigkeit $v = 600^m$ in der Richtung nach Süden hin abgefeuerte Kanonenkugel würden unter gleichen Umständen die Werthe sich ergeben:

$$p = 0^m{,}067\,788 \text{ und } s = 0^m{,}5423,$$

wenn die Bewegung im luftleeren Raume erfolgte.

Bei gegebener Dauer der Bewegung ist die Ablenkung — wie die obigen Beispiele zeigen — der Geschwindigkeit proportional. Wenn dagegen die ganze in der Richtung des Meridianes zurückgelegte Wegeslänge L als die gegebene Grösse zu betrachten wäre, welche unter den oben gemachten Voraussetzungen gleich vt gesetzt werden kann, so würde die Ablenkung aus der Gleichung:

$$s = 2 v \omega \sin \varphi \,.\, \frac{t^2}{2} = \frac{\omega \sin \varphi \,.\, L^2}{v}$$

zu berechnen sein, welche zeigt, dass die Ablenkung in diesem Falle als eine der Geschwindigkeit umgekehrt proportionale Grösse sich darstellt. So z. B. würde auf einer Kegelbahn der Einfluss der Erdumdrehung um so mehr sich geltend machen, je kleiner die Wurfgeschwindigkeit der Kugel ist, und die Ablenkung einer mit der Geschwindigkeit $v = 15^m$ sich bewegenden Kegelkugel wird 40mal so gross sein als die Ablenkung einer mit der Geschwindigkeit $v = 600^m$ sich bewegenden Kanonenkugel bei gleicher Länge der durchlaufenen Strecke.

§ 65.

Ablenkung eines tangential zum Parallelkreise sich bewegenden materiellen Punktes.

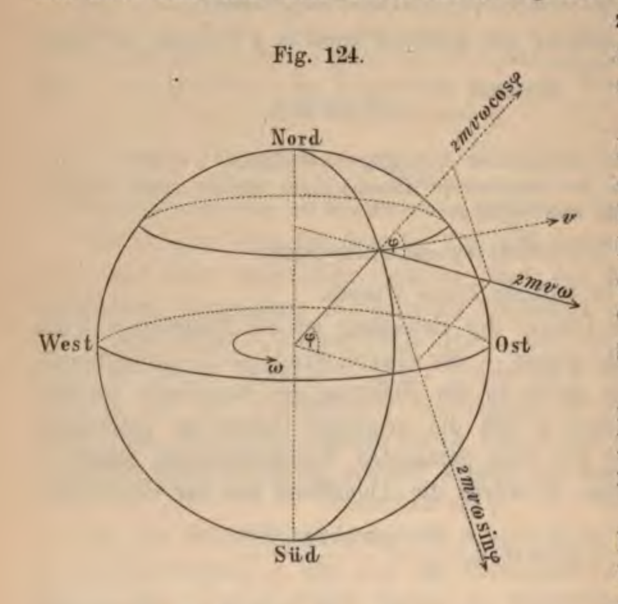
Wenn die relative Bewegung des materiellen Punktes in der Tangentenrichtung des Parallelkreises von Westen nach Osten stattfindet, so fällt die zweite scheinbare Kraft mit dem Halbmesser des

Parallelkreises zusammen und wirkt in der Richtung nach aussen. Da das relative Bahnelement rechtwinkelig zur augenblicklichen Drehachse gerichtet ist, so hat diese Kraft die Grösse:

$$1)\quad K = 2mv\omega,$$

und man kann sich dieselbe auf die in Fig. **124** angedeutete Weise zerlegt denken in zwei rechtwinkelig zu einander gerichtete Seitenkräfte, von denen die eine in der Richtung des Erdhalbmessers nach oben, und die andere in der Tangentenrichtung des Meridiankreises nach Süden wirkt. Die erstere vermindert den Druck des materiellen Punktes auf seine Unterlage. Die andere Seitenkraft:

Fig. 124.



$$2)\quad H = 2mv\omega \sin\varphi$$

erzeugt einen nach Süden gerichteten Seitendruck, oder — wenn der materielle Punkt auf fester Horizontal-Ebene frei sich bewegt — eine nach Süden gerichtete Ablenkung von derselben Grösse wie bei der Bewegung längs des Meridianes. Die am Schlusse des vorigen Paragraphen in Bezug auf die horizontale Ablenkung gefundenen Resultate können daher auch für den vorliegenden Fall als gültig betrachtet werden, insofern die ablenkende Kraft in beiden Fällen von links nach rechts gerichtet ist, und in beiden Fällen dieselbe Grösse hat.

Mit Zuziehung der im vorigen Paragraphen in Bezug auf die Bewegung längs des Meridianes gefundenen Gleichungen kann man nunmehr auch die Ablenkung eines in beliebiger Richtung auf fester horizontaler Unterlage sich bewegenden materiellen Punktes berechnen, indem man sich die Geschwindigkeit v nach den obigen beiden Hauptrichtungen zerlegt denkt (Fig. **125**), und für jede Seiten-

bewegung einzeln genommen die Ablenkung berechnet. Der nach Süden gerichteten Seitengeschwindigkeit $v_x = v \cos \delta$ entspricht die ablenkende Kraft

$$3)\quad H_1 = 2mv \cos \delta \,.\, \omega \sin \varphi$$

n der Richtung nach Westen. Der nach Osten gerichteten Seitengeschwindigkeit $v_y = v \sin \delta$ entspricht eine ablenkende Kraft, deren horizontale Componente

Fig. 125.

$$4)\quad H_2 = 2mv \sin \delta \,.\, \omega \sin \varphi$$

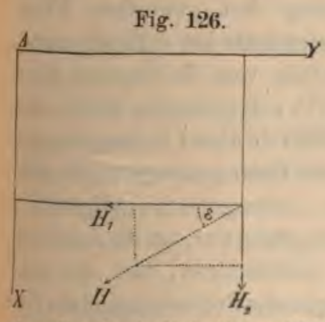
nach Süden gerichtet ist (Fig. **126**). Die Mittelkraft dieser beiden Kräfte hat die Grösse:

$$5)\quad H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2} = 2mv\omega \sin \varphi$$

und ist stets rechtwinkelig zur Geschwindigkeit v gerichtet, da die Seiten des Kräfteparallelogramms in Fig. **126** sich verhalten wie die correspondirenden Seiten des in Fig. **125** dargestellten Parallelogramms der Geschwindigkeiten.

Die Grösse der in einer bestimmten Zeit hervorgebrachten Ablenkung eines auf fester Horizontal-Ebene sich bewegenden materiellen Punktes ist also vollkommen unabhängig von der Bewegungsrichtung, und die am Schlusse des vorigen Paragraphen berechneten Werthe gelten nicht nur für die Bewegung von Norden nach Süden und von Westen nach Osten sondern auch für jede beliebige andere horizontale Bewegungsrichtung. Eine in horizontaler Richtung abgefeuerte Kanonenkugel, welche die Mündung des Laufes mit einer Geschwindigkeit von 600 Metern pro Secunde verlässt, erleidet unter den im vorigen Paragraphen vorausgesetzten Umständen in den ersten vier Secunden stets eine horizontale Ablenkung von 0,5423 Metern — wie auch immer die Achse des Laufes orientirt sein möge.

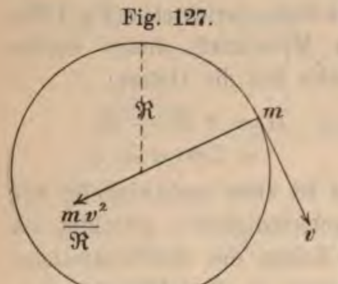
Fig. 126.



Da die horizontale ablenkende Kraft stets rechtwinkelig zur Bewegung gerichtet ist, so kann die Grösse der Geschwindigkeit v

durch sie nie verändert werden. Da ferner bei verhältnissmässig geringer Ausdehnung des Bewegungsgebietes auch die graphische Breite φ als eine während der Bewegung unverändert bleibende Grösse behandelt werden darf, so kann die Grösse der ablenkenden Kraft selbst, und in Folge dessen auch die Krümmung der Bahnlinie, als constant angesehen werden. Die Bewegung wird daher unter den obigen Voraussetzungen eine **gleichförmige Kreisbewegung** sein (Fig. 127). Den Halbmesser $\mathfrak{R}$ dieser Kreisbahn kann man berechnen (indem man die ablenkende Kraft gleich der Centripetalkraft setzt) aus der Gleichung:

Fig. 127.



$$6)\quad 2mv\omega \sin\varphi = \frac{mv^2}{\mathfrak{R}} \quad \text{oder:}$$

$$7)\quad \mathfrak{R} = \frac{v}{2\omega \sin\varphi}.$$

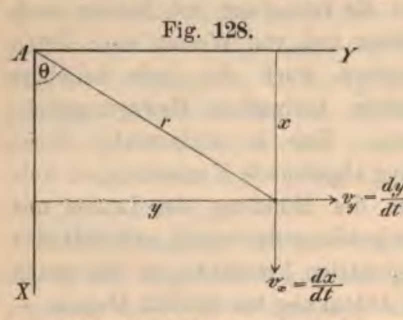
Für die Umlaufszeit T erhält man mit Benutzung des hier für $\mathfrak{R}$ gefundenen Werthes die Gleichungen:

$$8)\quad vT = 2\mathfrak{R}\pi,$$

$$9)\quad T = \frac{\pi}{\omega \sin\varphi}.$$

In unmittelbarer Nähe des Poles würde also ohne Vorhandensein der Reibung und des Luftwiderstandes eine auf horizontaler Eisfläche in beliebiger horizontaler Richtung fort geworfene Kugel 12 Stunden später von der entgegengesetzten Seite her zurückkommen, wobei die Kugel eine kreisförmige Bahnlinie vom Halbmesser $\mathfrak{R} = 6857 \, . \, v$ durchlaufen würde. Die Gültigkeit dieser Behauptung ist an die Bedingung geknüpft, dass die Anfangsgeschwindigkeit v klein genug war, um die Annahme zu rechtfertigen, dass die geographische Breite während der Bewegung stets wenig von 90° verschieden blieb. Für die geographische Breite der Stadt Aachen ($\varphi = 50^0 46' 34''$) würde in gleicher Weise die Werthe: $T = 15{,}45$ Stunden und $\mathfrak{R} = 8851 \, . \, v$ sich ergeben.

Fig. 128.



Wenn man annimmt, dass der materielle Punkt unter Einwir-

kung einer dem Abstande vom Anziehungscentrum A proportionalen Anziehungskraft in der festen Horizontal-Ebene sich bewegt (Fig. **128**), so erhält man mit Berücksichtigung des Einflusses der ablenkenden Kraft nach § 39 die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$10)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x + 2v_y\omega\sin\varphi,$$

$$11)\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y - 2v_x\omega\sin\varphi.$$

Indem man die erste mit y, die zweite mit x multiplicirt und nachher die erste von der zweiten subtrahirt, gelangt man zu der folgenden Gleichung:

$$12)\quad x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\sin\varphi\,(xv_x + yv_y).$$

Der Ausdruck auf der linken Seite ist, wie in § 54 gezeigt wurde, der Differenzialquotient der Grösse:

$$13)\quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\theta}{dt},$$

oder des statischen Momentes der Geschwindigkeit v in Bezug auf den Punkt A. Da ferner nach Fig. **128**;

$$x^2 + y^2 = r^2, \text{ oder: } x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt}$$

zu setzen ist, so erhält man nach Substitution der Werthe $v_x = \frac{dx}{dt}$ und $v_y = \frac{dy}{dt}$ die Gleichung:

$$14)\quad d\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = -\omega\sin\varphi\,.\,2r\,dr.$$

Durch Integration derselben gelangt man alsdann zu der folgenden Gleichung:

$$15)\quad r^2\frac{d\theta}{dt} = -\omega\sin\varphi\,.\,r^2 + \text{Const.}$$

Die Constante ist nach dem gegebenen Anfangswerthe der Grösse $r^2\frac{d\theta}{dt}$ zu berechnen. Wenn der anfängliche Bewegungszustand so beschaffen war, dass das statische Moment der Anfangsgeschwindigkeit in Bezug auf den Punkt A gleich Null war, so ist die Constante zu berechnen aus der Gleichung:

$$16)\quad 0 = -\omega\sin\varphi\,.\,r_0^2 + \text{Const.},$$

in welcher r_0 den anfänglichen Radiusvector bedeutet. Wenn also $r_0 = 0$ war, d. h. wenn der Anfangspunkt der Bewegung mit dem Anziehungscentrum selbst zusammenfiel, so ist die Constante ebenfalls gleich Null, und die Bewegungsgleichung nimmt in diesem Falle die folgende Form an:

$$17) \quad \frac{d\theta}{dt} = -\omega \sin \varphi.$$

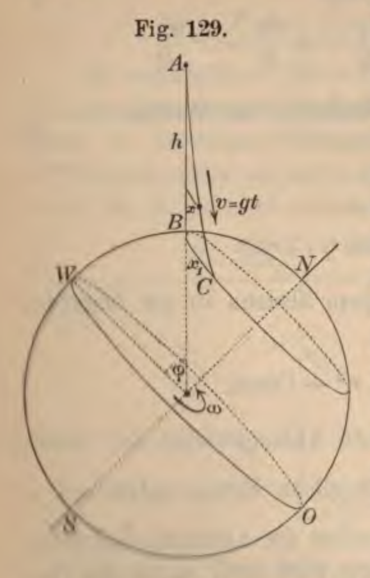
Die Bewegung kann daher in diesem Falle aufgefasst werden als geradlinig schwingende Bewegung eines materiellen Punktes, dessen Schwingungsbahn mit der constanten Winkelgeschwindigkeit $\omega \sin \varphi$ in der Richtung von Osten nach Süden um den Punkt A sich dreht.

§ 66.

Ablenkung eines in der Richtung des Erdhalbmessers sich bewegenden materiellen Punktes.

Wenn die relative Bewegung in der Richtung von oben nach unten stattfindet, so hat nach Fig. **129** der Winkel, welchen die relative Bahnlinie mit der Erdachse einschliesst, die Grösse $90^0 - \varphi$. Für diesen Fall ist also in der Gleichung 2) des § 61 die Grösse $\sin \varphi$ zu vertauschen mit der Grösse: $\sin(90^0 - \varphi) = \cos \varphi$, und man erhält für die zweite scheinbare Kraft die Gleichung:

Fig. 129.



$$K = 2 m \omega v \cos \varphi.$$

Da diese Kraft stets rechtwinkelig zu der durch das relative Bahnelement und die augenblickliche Drehachse gelegten Ebene gerichtet ist, und zwar dem Sinne der Drehbewegung entgegengesetzt, so wird dieselbe bei einem frei herabfallenden Körper in horizontaler Richtung von Westen nach Osten wirken und demselben eine nach Osten gerichtete Beschleunigung ertheilen in der Grösse:

$$p = \frac{K}{m} = 2 \omega v \cos \varphi.$$

Da die Beschleunigung p im Verhältniss zur Geschwindigkeit v sehr klein ist, so darf bei geringer Dauer der Fallbewegung auch hier

wieder angenommen werden, dass Grösse und Richtung der relativen Geschwindigkeit nur in sehr geringem Maasse durch jene Beschleunigung beeinflusst werden, dass also die nach t Secunden erreichte Fallgeschwindigkeit zu bestimmen ist, wie wenn die Drehbewegung der Erde nicht stattfände, aus der Gleichung:

$$v = gt.$$

Wenn mit x die nach t Secunden in der Richtung nach Osten hervorgebrachte Ablenkuug von der Lothlinie bezeichnet wird, so ist:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = p$$

die Beschleunigung des Wachsens dieser Grösse, und man erhält nach Substitution der beiden für v und p gefundenen Werthe die Gleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\,\omega g t \cos\varphi.$$

Indem man diese Gleichung alsdann zweimal integrirt, gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = g\omega\cos\varphi t^2, \quad \int_0^{x_1} dx = g\omega\cos\varphi\int_0^{t_1} t^2 dt, \quad x_1 = \frac{g\omega\cos\varphi t_1^3}{3},$$

in welcher letzteren t_1 die ganze Fallzeit und x_1 die in der ganzen Fallzeit hervorgebrachte östliche Ablenkung BC bedeutet. Wenn mit h die ganze Fallhöhe bezeichnet wird, so ist:

$$h = \frac{gt_1^2}{2},$$

und nach Substitution des aus dieser Gleichung für t_1 zu entnehmenden Werthes nimmt die obige Gleichung die Form an:

$$x_1 = \frac{g\omega\cos\varphi}{3}\sqrt{\left(\frac{2h}{g}\right)^3}.$$

Es würde also z. B. an einem Orte von der geographischen Breite $\varphi = 50^0\,46'\,34''$ ein von der Höhe $h = 400^{\mathrm{m}}$ herabfallender Körper den Boden im Abstande:

$$x_1 = \frac{9{,}81 \,.\, 0{,}00007292 \,.\, 0{,}632352}{3}\sqrt{\left(\frac{2\,.\,400}{9{,}81}\right)^3} = 0^{\mathrm{m}}{,}1111$$

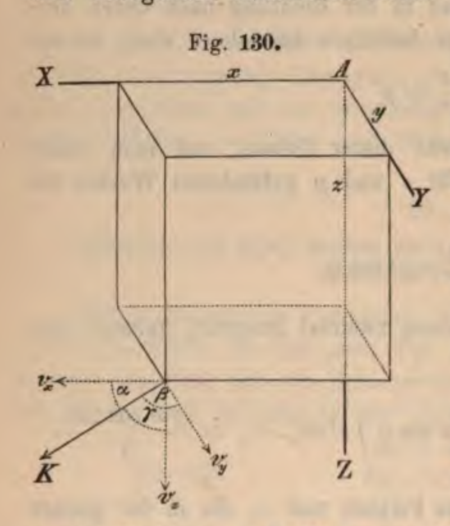
östlich von dem Fusspunkte der Lothlinie des Anfangspunktes erreichen.

§ 67.

Foucault'sches Pendel.

Mit Benutzung der in den vorigen drei Paragraphen gefundenen Resultate kann man nunmehr auch für einen in beliebiger Richtung sich bewegenden materiellen Punkt die ablenkende Kraft berechnen, indem man seine Geschwindigkeit auf die in Fig. 130 und Fig. 131 angedeutete Weise nach den drei Hauptrichtungen zerlegt, nämlich nach Süden, nach Osten und nach unten, worauf dann für jede der drei Seitengeschwindigkeiten einzeln genommen die ablenkende Kraft nach den gefundenen Regeln bestimmt werden kann.

Fig. 130.



Nach § 63 entspricht der nach Süden gerichteten Seitengeschwindigkeit v_x die ablenkende Kraft:

$$K_1 = 2 m v_x \omega \sin \varphi$$

in der Richtung nach Westen. Nach § 65 entsprechen der nach Osten gerichteten Seitengeschwindigkeit v_y zwei ablenkende Kräfte, nämlich die Horizontalkraft:

$$K_2 = 2 m v_y \omega \sin \varphi$$

in der Richtung nach Süden und die verticale Seitenkraft:

$$K_3 = 2 m v_y \omega \cos \varphi$$

in der Richtung nach oben. Der vertical abwärts gerichteten Seitengeschwindigkeit v_z entspricht die ablenkende Kraft:

$$K_4 = 2 m v_z \omega \cos \varphi$$

in der Richtung nach Osten. Hiernach ergeben sich die in Fig. 132 zusammengestellten Kräfte, und für die drei Seitenkräfte der ablenkenden Kraft K erhält man nach Fig. 130 und Fig. 132 die folgenden Gleichungen:

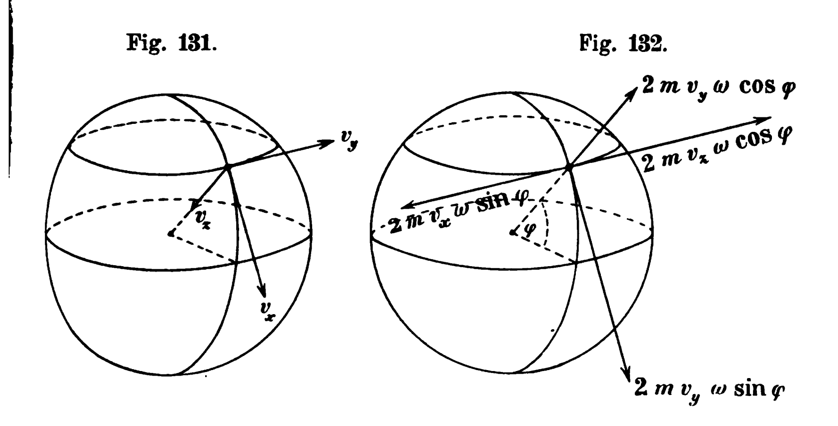
$$K \cos \alpha = 2 m v_y \omega \sin \varphi,$$

$$K \cos \beta = 2 m v_z \omega \cos \varphi - 2 m v_x \omega \sin \varphi,$$

$$K \cos \gamma = - 2 m v_y \omega \cos \varphi.$$

Für die Bewegung eines materiellen Punktes, welcher durch einen Faden von unveränderlicher Länge l mit dem festen Aufhänge-

Fig. 131. Fig. 132.



punkt A verbunden ist, erhält man nach Fig. 133, indem man zu den beiden wirklich vorhandenen Kräften mg und N noch die den Einfluss der Erdrotation repräsentirende Kraft K hinzufügt, die drei Gleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Nx}{ml} + \frac{K\cos\alpha}{m},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Ny}{ml} + \frac{K\cos\beta}{m},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - \frac{Nz}{ml} + \frac{K\cos\gamma}{m},$$

welche nach Substitution der oben für die drei Componenten der ablenkenden Kraft gefundenen Werthe die folgenden Formen annehmen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Nx}{ml} + 2v_y\omega\sin\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Ny}{ml} + 2\omega(v_z\cos\varphi - v_x\sin\varphi),$$

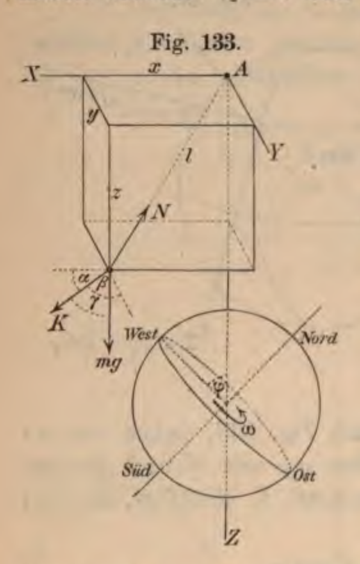
$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - \frac{Nz}{ml} - 2v_y\omega\cos\varphi.$$

Indem man die erste mit y, die zweite mit x multiplicirt, und hierauf die erste von der zweiten subtrahirt, erhält man für die Bewegung der Horizontalprojection des materiellen Punktes die Gleichung:

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\sin\varphi\,(xv_x + yv_y) + 2v_z x\omega\cos\varphi.$$

Damit das letzte Glied auf der rechten Seite verschwinde, müsste entweder $v_z = 0$ oder $\cos\varphi = 0$ sein. Wenn man also die Annahme macht: entweder, dass wegen unendlich kleiner Grösse des Schwingungswinkels die verticale Seitengeschwindigkeit des materiellen Punktes stets als verschwindend klein betrachtet werden darf, oder dass der geographische Ort, an welchem die Schwingungen stattfinden, mit einem der beiden Pole zusammenfällt, so ist es zulässig, jenes Glied wegzulassen und die Bewegung der Horizontalprojection zu bestimmen aus der Gleichung:

Fig. 133.



$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\sin\varphi\,(xv_x + yv_y),$$

welche identisch ist mit der in § 65 für die Bewegung eines in fester Horizontal-Ebene schwingenden Punktes gefundenen Gleichung 12). Wenn also die Anfangslage des Pendels mit der Verticalen des Anfangspunktes zusammenfiel, so darf die am Schlusse jenes Paragraphen mit Bezug auf Fig. 128 gefundene Gleichung 17):

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega\sin\varphi$$

auch für den vorliegenden Fall als gültig betrachtet werden. Diese Gleichung zeigt, dass die Schwingungsebene des Pendels mit der constanten Winkelgeschwindigkeit $\omega\sin\varphi$ in der Richtung von Osten nach Süden um die Verticale des Aufhängepunktes sich dreht.

Für ein am Nordpole schwingendes Pendel würde $\sin\varphi = 1$ zu setzen sein, und die Verticalachse des Aufhängepunktes mit der Erdachse zusammenfallen. Es würde also die Schwingungsebene dieses Pendels eine relative Drehbewegung um die Erdachse ausführen mit einer Winkelgeschwindigkeit, welche ihrer Grösse nach mit der Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde übereinstimmt und ihrem Sinne nach derselben entgegengesetzt ist. Abgesehen von der gleichzeitig stattfindenden fortschreitenden Bewegung der Erde würde also die Schwingungsebene des Pendels im absoluten Ruhestande sich befinden.

An einem Orte, dessen geographische Breite $\varphi = 50^0\,46'\,34''$ (wie die der

Stadt Aachen), würde die Schwingungsebene des Pendels mit der Winkelgeschwindigkeit:

$$0{,}774\,681 \,.\, \omega = 0{,}000\,056\,49$$

in der Richtung Ost-Süd-West-Nord um die Verticalachse des Aufhängepunktes sich drehen, also zur vollen Umdrehung eine Zeit gebrauchen, welche zur Umdrehungszeit der Erde sich verhält wie 1 : 0,774 681.

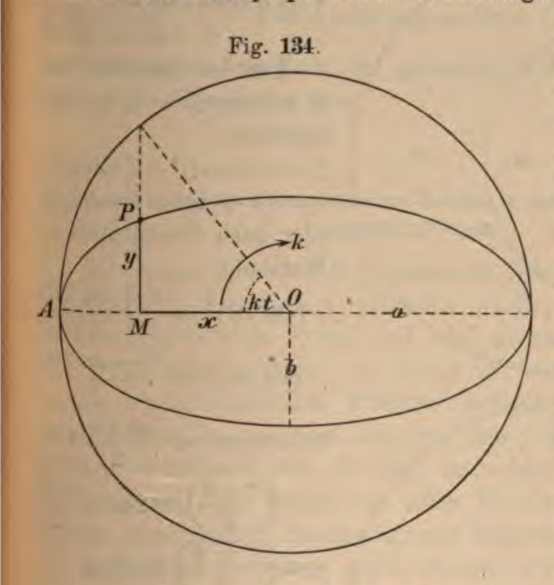
Für ein am Aequator schwingendes Pendel würde $\sin\varphi = 0$ zu setzen sein; es würde also dort gar keine relative Drehbewegung der Schwingungsebene stattfinden.

§ 68.

Relative Bewegung des schwingenden Punkies in Bezug auf eine rotirende Scheibe.

In § 39 wurde gezeigt, dass die elliptische Bewegung, welche ein materieller Punkt unter Einwirkung einer dem Abstande von einem festen Punkte proportionalen Anziehungskraft ausführt, als Projection einer gleichförmigen Kreisbewegung auf eine gegen die Bahn-Ebene geneigte Ebene angesehen werden kann, und dass der Cosinus des Neigungswinkels gleich dem Verhältniss der beiden Halbachsen der Ellipse ist. Wenn man den Endpunkt der grossen Achse als Anfangspunkt der Bewegung betrachtet, so ergeben sich für die Coordinaten des dem Zeitwerthe t entsprechenden Punktes der Bahnlinie nach Fig. 134 die Gleichungen:

Fig. 134.



$$x = a\cos kt,$$

$$y = a\sin kt \cdot \frac{b}{a} = b\sin kt.$$

Um die relative Bewegung in Bezug auf die mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ω nach links herum rotirend gedachte Bild-

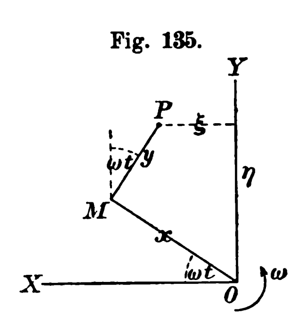


Fig. 135.

ebene zu bestimmen, hat man sich (nach § 23) die Bahnebene nach **rechts** herum mit der Winkelgeschwindigkeit ω gedreht zu denken, und erhält nach Fig. 135, indem man sich die Linie OMP um den Winkel ωt gedreht denkt, für die Coordinaten des correspondirenden Punktes der relativen Bahnlinie die Gleichungen:

$$\xi = x \cos \omega t - y \sin \omega t,$$
$$\eta = x \sin \omega t + y \cos \omega t,$$

welche nach Substitution der obigen Werthe von x und y die folgenden Formen annehmen:

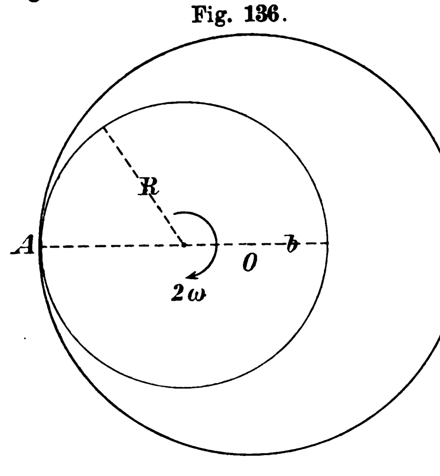


Fig. 136.

$$\xi = a \cos kt \cos \omega t - b \sin kt \sin \omega t,$$
$$\eta = a \cos kt \sin \omega t + b \sin kt \cos \omega t.$$

Für den speciellen Fall, in welchem $k = \omega$ ist, wird hiernach:

$$\xi = a (\cos \omega t)^2 - b (\sin \omega t)^2,$$
$$\eta = (a + b) \sin \omega t \cos \omega t,$$

oder nach Substitution der Werthe:

$$(\cos \omega t)^2 = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2},$$
$$(\sin \omega t)^2 = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2},$$
$$\sin \omega t \cos \omega t = \frac{\sin 2\omega t}{2}:$$

$$\xi = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cos 2\omega t + \frac{a-b}{2},$$
$$\eta = \left(\frac{a+b}{2}\right) \sin 2\omega t.$$

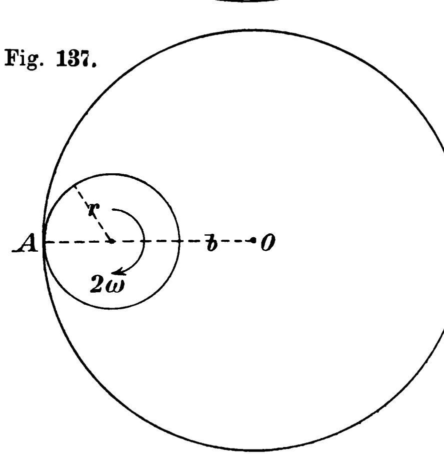


Fig. 137.

Die relative Bewegung ist also in diesem Falle eine gleichförmige Kreisbewegung. Der Mittelpunkt der Kreislinie liegt im Abstande $\frac{a-b}{2}$ vom Anziehungscen-

trum, der Halbmesser der Kreislinie hat die Grösse $R = \frac{a+b}{2}$, und die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der Halbmesser sich dreht, hat die Grösse 2ω (Fig. 136).

Wenn man ein anderes Mal $k = -\omega$ setzt, so erhält man auf dieselbe Weise die Gleichungen:

$$\xi = \left(\frac{a-b}{2}\right) \cos 2\omega t + \frac{a+b}{2},$$

$$\eta = \left(\frac{a-b}{2}\right) \sin 2\omega t.$$

Im letzteren Falle wird also die Bahnlinie der relativen Bewegung eine Kreislinie vom Halbmesser $r = \frac{a-b}{2}$, und ihr Mittelpunkt liegt im Abstande $\frac{a+b}{2}$ vom Anziehungscentrum (Fig. 137). Der Werth $b = 0$ entspricht dem Falle der geradlinigen Schwingungen, und für diesen Fall wird $R = r = a$.

§ 69.

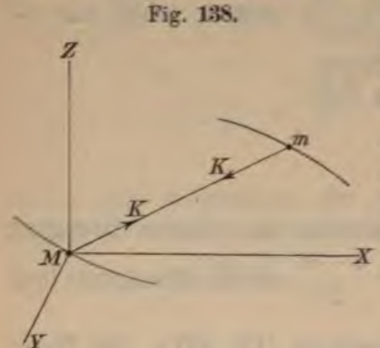
Relative Bewegung eines materiellen Punktes in Bezug auf einen anderen materiellen Punkt.

Die Grösse der zweiten scheinbaren Kraft, für welche in § 59 der Ausdruck $2m\omega v \sin\alpha$ gefunden wurde, enthält die Winkelgeschwindigkeit ω als Factor und wird gleich Null, sobald $\omega = 0$ ist. Wenn also der Raum, in Bezug auf welchen die relative Bewegung eines materiellen Punktes bestimmt werden soll, keine Drehbewegung hat, sondern lediglich eine fortschreitende Bewegung ausführt, so reducirt sich die Zahl der scheinbaren Kräfte auf eine, und zwar diejenige, welche der allen Punkten des fortschreitenden Raumes gemeinsamen Beschleunigung entspricht.

Da bei der Bewegung eines Punktes nicht die Rede sein kann von einer Drehung desselben, so hat man, um eine relative Bewegung eines materiellen Punktes m in Bezug auf einen anderen materiellen Punkt M zu bestimmen, dieselbe immer aufzufassen als relative Bewegung in Bezug auf einen fortschreitenden Raum, dessen Bewegung mit derjenigen des materiellen Punktes M übereinstimmt, d. h. man hat sich diesen letzteren als Durchschnittspunkt der drei Achsen eines in fortschreitender Bewegung begriffenen Coordinatensystems zu denken, in Bezug auf welches

nunmehr die relative Bewegung des materiellen Punktes m be-
stimmt werden soll (Fig. 138). Wenn also z. B. die beiden mate-
riellen Punkte ihre absoluten Bewegungen ausführen unter Einwirkun
der Kraft K, mit welcher ihre Massen M und m einander gegen-
seitig anziehen, so ist als Be-
schleunigung jenes fortschreitende
Coordinatensystems diejenige Be-
schleunigung zu betrachten, welch
dem materiellen Punkte M durc
die Kraft K ertheilt wird. Dies
Beschleunigung erfolgt in der Rich-
tung von M nach m und hat di
Grösse:

Fig. 138.



$$1)\quad p = \frac{K}{M}.$$

Es ist also nach der in § 59 gefundenen Regel an dem mate-
riellen Punkte m zu der wirklich auf denselben wirkenden Kraft
noch die jener Beschleunigung entsprechende Kraft:

$$2)\quad mp = \frac{m}{M}\,K$$

— und zwar in entgegengesetzter Richtung genommen, also in d
Richtung von m nach M hin wirkend — hinzuzufügen, und nun-
mehr die Bewegung des Punktes m so zu bestimmen, wie wen
das Coordinatensystem im Ruhestande sich befände. Die relativ
Bewegung des Punktes m wird also gerade so erfolgen, wie wen
derselbe unter Einwirkung einer Kraft von der Grösse:

$$3)\quad K_1 = K\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

sich bewegte, welche beständig in der Richtung nach dem fest
Punkte M hin wirkt.

Die Anfangsgeschwindigkeit dieser relativen Bewegung ka
man nach der in § 22 gefundenen Regel aus den beiden gegeben
Anfangsgeschwindigkeiten der absoluten Bewegungen bestimme
indem man die Resultirende bildet aus der absoluten Anfangsg
schwindigkeit des Punktes m und der hinzugefügten entgegengese
genommenen absoluten Anfangsgeschwindigkeit des Punktes M. I
Ebene, welche durch den Punkt M und die nunmehr als gegeb
zu betrachtende relative Anfangsgeschwindigkeit des Punktes
hindurchgelegt wird, ist zugleich die Ebene, in welche die ga

Bahnlinie der relativen Bewegung hineinfällt, da die Kraft K_1, in der Richtung von m nach M wirkend, beständig in dieser Ebene bleibt. Man kann daher die relative Bewegung des materiellen Punktes m genau auf dieselbe Weise bestimmen, wie in § 39 . . . § 43 die absolute Bewegung eines materiellen Punktes berechnet wurde, der unter Einwirkung einer von einem festen Punkte ausgehenden anziehenden oder abstossenden Kraft K sich bewegt, indem man sich überall bei den dort untersuchten Fällen diese Kraft in dem constanten Verhältniss $\left(1+\frac{m}{M}\right):1$ vergrössert denkt.

So würde man z. B. bei dem in § 41 behandelten Falle, in welchem für die nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze wirkende Kraft K die Grösse:

$$4)\quad K=\frac{m\mu}{\rho^2}$$

gefunden wurde, diese Kraft zu ersetzen haben durch die Kraft

$$5)\quad K_1=\frac{m\mu}{\rho^2}\left(1+\frac{m}{M}\right),$$

wenn es sich darum handelt, die relative Bewegung der angezogenen Masse m in Bezug auf die anziehende Masse M zu bestimmen; und wenn man abkürzungsweise die Constante:

$$6)\quad \mu\left(1+\frac{m}{M}\right)=\mu_1$$

setzt, so würden die sämmtlichen dort gefundenen Gleichungen nach Vertauschung der Constante μ mit der Constante μ_1 unmittelbar für diese relative Bewegung gelten.

Es folgt hieraus, dass bei sehr kleinem Werthe des Massenverhältnisses $\frac{m}{M}$ — wie z. B. in dem Falle, wo es sich um die relative Bewegung der Erde in Bezug auf die Sonne handelt — der Fehler sehr klein ist, welchen man begeht, indem man die relative Bewegung mit der absoluten Bewegung verwechselt und die anziehende Masse M als im absoluten Ruhestande befindlich ansieht. Bei der Bestimmung der relativen Bewegung des Mondes in Bezug auf die Erde würde man an die Stelle der in § 42, Gleichung 30) gefundenen Grösse $\mu=gr^2$ die Constante $\mu_1=\mu\left(1+\frac{1}{80}\right)$ zu setzen haben. Für einen aus zwei Sternen von gleichen Massen bestehenden Doppelstern würde man bei der Bestimmung der relativen Bewegung des einen Sternes in Bezug auf den anderen die Constante μ des § 41 zu ersetzen haben durch die Constante $\mu_1=2\mu$. Es würde daher die Gleichung 29), welche in § 42 als Bedingungsgleichung der kreisförmigen Bahnlinie gefunden wurde, die Form annehmen:

$$7)\quad v_0=\sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0}},$$

d. h. es würde bei der relativen Bewegung die der kreisförmigen Bahnlinie entsprechende Anfangsgeschwindigkeit dieselbe Grösse haben, welche bei der absoluten Bewegung um das unbeweglich vorausgesetzte Anziehungscentrum herum der parabolischen Form der Bahnlinie entsprechen würde.

Bei der am Schlusse des § 42 ausgeführten Berechnung des Massenverhältnisses zweier Centralkörper wurden die Massen derselben im Verhältniss zu den Massen ihrer Begleiter so gross vorausgesetzt, dass die ersteren als ruhend, und die relativen Bewegungen der letzteren als absolute Bewegungen behandelt werden durften. Wäre die obige Voraussetzung nicht erfüllt, so müssten statt der Grössen μ_1 und μ_2 die nach Gleichung 6) zu berechnenden Grössen μ_1' und μ_2' gesetzt werden, und statt des Quotienten $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ würde in der Gleichung 32) des § 42 nunmehr zu setzen sein:

$$8) \quad \frac{\mu_1'}{\mu_2'} = \frac{M_1\left(1 + \frac{m_1}{M_1}\right)}{M_2\left(1 + \frac{m_2}{M_2}\right)}.$$

Für das Verhältniss der beiden Massensummen erhält man alsdann aus der Gleichung 34) des § 42 den Werth:

$$9) \quad \frac{M_1 + m_1}{M_2 + m_2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2.$$

Wenn hierin wieder die mit dem Index „Eins" bezeichneten Grössen auf die Bewegung der Erde um die Sonne, und die mit dem Index „zwei" bezeichneten Grössen auf die Bewegung des Sirius-Begleiters um den Hauptstern bezogen werden, so kann annäherungsweise $a_2 = 20 \,.\, a_1$ und $T_2 = 50 \,.\, T_1$ gesetzt werden; man erhält dann für das Verhältniss der beiden Massensummen den Werth:

$$\frac{M_1 + m_1}{M_2 + m_2} = \frac{50^2}{20^3} = \frac{1}{3{,}2}.$$

Da die hier mit m_1 bezeichnete Erdmasse neben der Sonnenmasse M_1 als verschwindend klein vernachlässigt werden kann, so folgt hieraus, dass die Massensumme des Sirius und seines Begleiters 3,2 Sonnenmassen beträgt, wovon etwa zwei Drittel auf den Hauptstern und ein Drittel auf den Begleiter zu rechnen sind.

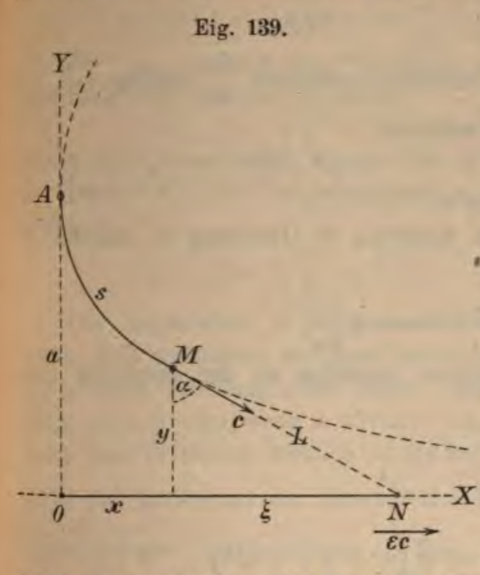
§ 70.

Verfolgungskurve.

Wenn ein Punkt, welcher eine beliebig gegebene Bewegung ausführt, von einem zweiten Punkte in solcher Weise verfolgt wird, dass der letztere sich stets in der Richtung nach dem augenblicklichen Orte des ersteren hin bewegt, so beschreibt der zweite Punkt eine Bahnlinie, welche die „Verfolgungskurve" genannt werden kann.

In Bezug auf die gegebene Bewegung des Verfolgten soll hier vorausgesetzt werden, dass derselbe gleichförmig längs einer geradlinigen Bahn sich bewegt, und in Bezug auf die Bewegung des Verfolgers soll vorausgesetzt werden, dass die Geschwindigkeit desselben ihrer Grösse nach ebenfalls constant ist. Als Anfangspunkt der Zeit t soll derjenige Zeitpunkt gewählt werden, in welchem die gerade Verbindungslinie der beiden Punkte rechtwinkelig zur geradlinigen Bahn des Verfolgten gerichtet war, und die Länge $AO = a$ hatte (Fig. 139). Wenn mit c die Geschwindigkeit des Verfolgers und mit εc die Geschwindigkeit des Verfolgten bezeichnet wird, so hat (nach Fig. 139) die während der Zeit t von dem Verfolger durchlaufene Bogenlänge AM die Grösse:

Eig. 139.



$$1)\quad s = ct,$$

und die von dem Verfolgten während derselben Zeit durchlaufene geradlinige Strecke ON die Länge:

$$2)\quad x + \xi = \varepsilon c t = x + y \operatorname{tg} \alpha.$$

Der letzteren Gleichung kann man nach Substitution der Werthe $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{dx}{dy}$ und $ct = s$ auch die folgende Form geben:

$$3)\quad \varepsilon s = x - y \frac{dx}{dy}.$$

Indem man diese Gleichung differenziirt erhält man für den Differenzialquotienten von s, nach y genommen, die Gleichung:

$$4)\quad \varepsilon \frac{ds}{dy} = \frac{dx}{dy} - y \frac{d^2x}{dy^2} - \frac{dx}{dy},$$

und wenn man den Differenzialquotienten von x, nach y genommen, mit u bezeichnet, so kann man statt dessen auch setzen:

$$5)\quad \varepsilon \frac{ds}{dy} = -y \frac{du}{dy}.$$

Die Bedeutung der Grösse u ergiebt sich (nach Fig. 139) aus der Gleichung:

$$6)\quad u = \frac{dx}{dy} = -\frac{\xi}{y} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

und für den Werth des Differenzialquotienten $\frac{ds}{dy}$ ergeben sich aus der Figur die folgenden Ausdrücke:

$$7)\quad \frac{ds}{dy} = -\frac{1}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{y^2+\xi^2}}{y} = -\sqrt{1+u^2}.$$

Wenn man diesen letzteren Ausdruck in Gleichung 5) einsetzt, so erhält man die Gleichung:

$$8)\quad -\varepsilon\sqrt{1+u^2} = -y\frac{du}{dy},$$

und gelangt durch Integration derselben zu den folgenden Gleichungen:

$$9)\quad \varepsilon\int_a^y \frac{dy}{y} = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$10)\quad \varepsilon\lg\left(\frac{y}{a}\right) = \lg\left(u+\sqrt{1+u^2}\right),$$

$$11)\quad \left(\frac{y}{a}\right)^\varepsilon = u+\sqrt{1+u^2},$$

$$12)\quad u = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{y}{a}\right)^\varepsilon - \left(\frac{y}{a}\right)^{-\varepsilon}\right\} = \frac{dx}{dy}.$$

Durch nochmalige Integration erhält man alsdann die Gleichungen:

$$13)\quad 2\int_0^x dx = a^{-\varepsilon}\int_a^y y^\varepsilon dy - a^\varepsilon\int_a^y y^{-\varepsilon}dy,$$

$$14)\quad 2x = \frac{a^{-\varepsilon}}{(1+\varepsilon)}\left(y^{1+\varepsilon} - a^{1+\varepsilon}\right) - \frac{a^\varepsilon}{(1-\varepsilon)}\left(y^{1-\varepsilon} - a^{1-\varepsilon}\right),\ \text{oder:}$$

$$15)\quad x = \frac{a\varepsilon}{1-\varepsilon^2} + \frac{y^{1+\varepsilon}}{2(1+\varepsilon)a^\varepsilon} - \frac{a^\varepsilon y^{1-\varepsilon}}{2(1-\varepsilon)},$$

mit welcher letzteren die gesuchte Gleichung der Verfolgungskurve gefunden ist.

Zur Berechnung der Verfolgungsdauer können die Gleichungen 2) und 6) benutzt werden, aus denen man für t zunächst den Ausdruck erhält:

$$16)\quad t = \frac{x-yu}{\varepsilon c},$$

welchem man nach Substitution der oben für u und x gefundenen Werthe alsdann die folgende Form geben kann:

$$17)\quad t = \frac{a}{c(1-\varepsilon^2)} - \frac{y^{1+\varepsilon}}{2c(1+\varepsilon)a^\varepsilon} - \frac{a^\varepsilon y^{1-\varepsilon}}{2c(1-\varepsilon)}.$$

Für den Abstand des Verfolgers von dem Verfolgten erhält man nach Fig. **139** die Gleichung:

$$18)\quad L = \sqrt{y^2 + \xi^2} = y\sqrt{1+u^2},$$

welche nach Substitution des aus den Gleichungen 11) und 12) für die Grösse $\sqrt{1+u^2}$ zu entnehmenden Werthes die folgende Form annimmt:

$$19)\quad L = \frac{y^{1+\varepsilon}}{2a^\varepsilon} + \frac{a^\varepsilon y^{1-\varepsilon}}{2}.$$

Der Augenblick, in welchem der Verfolger den Verfolgten erreicht, fällt zusammen mit dem Zeitpunkte, in welchem $y = 0$ wird. Die letztere Gleichung zeigt jedoch, dass für $y = 0$ nur dann zugleich $L = 0$ wird, wenn ε kleiner ist als Eins. In diesem Falle findet das Erreichen wirklich statt, und entsprechen dem Augenblicke des Erreichens die Werthe: $x = \frac{a\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$ und $t = \frac{a}{c(1-\varepsilon^2)}$. Wenn dagegen ε grösser ist als Eins, so wird $x = \infty$ und $t = \infty$ für $y = 0$. Die krummlinige Bahn des Verfolgers nähert sich in diesem Falle asymptotisch der geradlinigen Bahn des Verfolgten, und der Abstand L, welcher anfangs bis zu einem gewissen Minimum abnimmt, wird für $t = \infty$ ebenfalls unendlich gross. Indem man die Gleichung 19) differenziirt und den Differenzialquotienten $\frac{dL}{dy} = 0$ setzt, findet man, dass jenes Minimum dem Werthe:

$$20)\quad \frac{y}{a} = \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\right)^{\frac{1}{2\varepsilon}}$$

entspricht, also z. B. für $\varepsilon = 1{,}5$ dem Werthe $\frac{y}{a} = 0{,}5848$, für welchen der Quotient $\frac{L}{a} = 0{,}7846$ wird.

Aus den Gleichungen 15) und 19) erhält man für $\varepsilon = 1{,}5$ die folgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$\frac{y}{a} =$	1	0,75	0,5848	0,5	0,25	0,125	0
$\frac{x}{a} =$	0	0,05213	0,16	0,2496	0,806	1,63	∞
$\frac{L}{a} =$	1	0,821	0,7846	0,795	1,016	1,417	∞.

Für den speciellen Fall, in welchem $\varepsilon = 1$ ist, nehmen die Gleichungen 12), 19), 13) und 16) resp. die folgenden Formen an:

$$21)\quad u = \frac{y}{2a} - \frac{a}{2y},$$

$$22)\quad L = \frac{y^2}{2a} + \frac{a}{2},$$

$$23)\quad 2\int_0^x dx = \frac{1}{a}\int_a^y y\,dy - a\int_a^y \frac{dy}{y}, \text{ oder:}$$

$$24)\quad x = \frac{y^2 - a^2}{4a} - \frac{a}{2}\lg\left(\frac{y}{a}\right),$$

$$25)\quad t = \frac{a}{4c} - \frac{y^2}{4ac} - \frac{a}{2c}\lg\left(\frac{y}{a}\right).$$

Wenn also die Geschwindigkeit des Verfolgers dieselbe Grösse hat wie die des Verfolgten, so entsprechen dem Werthe $y = 0$ die Werthe: $u = -\infty$, $L = \frac{a}{2}$, $x = \infty$ und $t = \infty$, d. h. der Abstand des Verfolgers vom Verfolgten nähert sich dem Grenzwerthe $L = \frac{a}{2}$, ohne denselben je zu erreichen.

§ 71.

Relative Bewegung des Verfolgers in Bezug auf den Verfolgten.

Wenn der Verfolger und der Verfolgte ausser den im vorigen Paragraphen angenommenen Bewegungen gemeinschaftlich noch eine dritte Bewegung ausführten, welche die der Bewegung des Verfolgten entgegengesetzte Bewegung bildet, so würde der letztere im absoluten Ruhezustande sich befinden, und für den Verfolger würde eine resultirende Bewegung sich ergeben, welche in Bezug auf den im vorigen Paragraphen angenommenen Fall die relative Bewegung des Verfolgers in Bezug auf den Verfolgten darstellt.

Da die neu hinzukommende Bewegung parallel zu der Abscissen-Achse OX gerichtet ist, so wird die Grösse, welche die Ordinate des Verfolgers nach Ablauf der Zeit t erreicht, durch diese hinzukommende Bewegung nicht geändert. Die Gleichung 17) des vorigen Paragraphen behält daher ihre Gültigkeit; ebenso auch die Glei-

chung 19), weil die Länge der Verbindungslinie der beiden Punkte durch die hinzukommende gemeinschaftliche Bewegung derselben keine Aenderung erleiden kann. Durch die obigen beiden Gleichungen ist daher sowohl das Gesetz der relativen Bewegung als die Form der relativen Bahnlinie gegeben, insofern für jeden willkürlich gewählten Werth der Ordinate y aus Gleichung 17) der zugehörige Werth von t und aus Gleichung 19) der zugehörige Werth von L, oder die Entfernung des den Werthen von y und t entsprechenden Ortes der relativen Bahnlinie von dem festen Punkte O berechnet werden kann.

Die zugehörige Abscisse erhält man nach den im vorigen Paragraphen für x gefundenen Gleichungen, indem man zu der Grösse x die Grösse: $-\varepsilon ct$, als die der neu hinzugekommenen Bewegung entsprechende Wegeslänge, hinzufügt. Aus den Gleichungen 2) und 6) ergiebt sich hiernach für diese Abscisse der Werth:

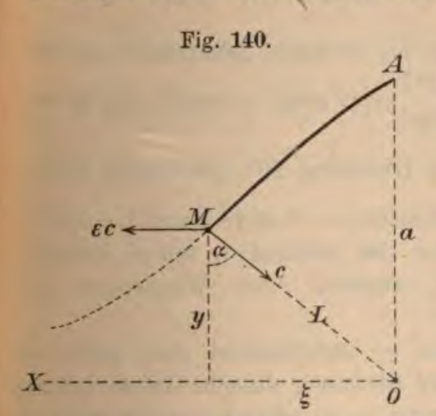
$$26)\quad x - \varepsilon ct = -\xi = -y \operatorname{tg} \alpha = +yu,$$

und mit Benutzung des in Gleichung 12) des vorigen Paragraphen für u gefundenen Ausdruckes erhält man für die relative Bahnlinie AM (Fig. 140) die Gleichung:

$$27)\quad \xi = \frac{a^{\varepsilon} y^{1-\varepsilon}}{2} - \frac{y^{1+\varepsilon}}{2\, a^{\varepsilon}}.$$

Mit der hier untersuchten relativen Bewegung des Verfolgers in Bezug auf den Verfolgten würde die absolute Bewegung eines Punktes übereinstimmen, welcher gleichzeitig die folgenden zwei Bewegungen ausführt: eine Bewegung mit der Geschwindigkeit c in der Richtung nach dem festen Punkte O hin, und eine Bewegung mit der Geschwindigkeit εc in der Richtung rechtwinkelig zu der Verbindungslinie seines Anfangsortes A mit dem festen Punkte O. Eine solche Bewegung würde z. B. ein in finsterer Nacht auf dem Meere treibender Schiffer oder Schwimmer ausführen, welcher beständig in der Richtung nach dem Leucht-

Fig. 140.



thurm O hin rudert oder schwimmt, und gleichzeitig in der Richtung rechtwinkelig zu AO mit der Geschwindigkeit εc von der Meeresströmung fortgetrieben wird.

Denkt man sich die Abscissen-Achse OX zugleich als Uferlinie, so ergiebt sich aus den am Schlusse des vorigen Paragraphen gezogenen Schlussfolgerungen, dass der Schiffer oder Schwimmer das Ufer niemals erreichen wird, wenn ε grösser als 1 ist, d. h. wenn die Geschwindigkeit der Strömung grösser ist als die des Ruderns oder Schwimmens; denn in diesem Falle entsprechen dem Werthe $y = 0$ die Werthe $t = \infty$ und $\xi = \infty$. Der Schwimmer würde daher ertrinken, obgleich zur Zeit des beginnenden Nachlassens seiner Kräfte das ihm unsichtbare rettende Ufer vielleicht schon in unmittelbarer Nähe sich befindet und in kürzester Zeit von ihm erreicht werden könnte, wenn er bei plötzlicher Erhellung der Gegend die Uferlinie gewahrte und in richtiger Auffassung seiner Situation statt des früheren Kurses den rechtwinkelig gegen die Uferlinie gerichteten Kurs wählte.

Aus den Gleichungen 27) und 19) erhält man z. B. für $\varepsilon = 1{,}5$ die folgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe:

$\frac{y}{a} =$	1	$\frac{3}{4}$	0,5848	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
$\frac{\xi}{a} =$	0	0,334	0,523	0,619	0,984	1,411	∞
$\frac{L}{a} =$	1	0,821	0,7846	0,795	1,016	1,417	∞

Wenn man die Gleichung 27) zweimal differenziirt und den zweiten Differenzialquotienten $\frac{d^2\xi}{dy^2} = 0$ setzt, so erhält man für den Quotienten $\frac{y}{a}$ wiederum den in Gleichung 20) gefundenen Werth. Hieraus folgt, dass die den Coordinaten $y = 0{,}5848\,a$ und $\xi = 0{,}523\,a$ entsprechende Stelle, an welcher der Abstand L seinen kleinsten Werth $L = 0{,}7846\,a$ erreicht, zugleich einen Wendepunkt der Curve bildet.

Wenn $\varepsilon = 1$ gesetzt wird — entsprechend dem Falle, in welchem die Geschwindigkeit der Strömung dieselbe Grösse hat wie die des Ruderns oder Schwimmens — so nimmt die Gleichung 2) die folgende Form an:

$$28)\quad \xi = \frac{a}{2} - \frac{y^2}{2a}, \quad \text{oder:} \quad y^2 = 2a\left(\frac{a}{2} - \xi\right).$$

In diesem Falle ist also die Bahnlinie eine **Parabel**, deren Achse mit der Uferlinie OX, und deren Brennpunkt mit dem Punkte O zusammenfällt. Der Scheitelpunkt liegt im Abstande $\frac{a}{2}$ links von dem Punkte O und wird (nach Gleichung 25) in der Zeit $t = \infty$, also niemals, erreicht.

DRITTER ABSCHNITT.

Mechanik des Systems von materiellen Punkten.

Capitel XI.

Gleichgewicht eines Systems von materiellen Punkten.

§ 72.

Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Ein System von materiellen Punkten befindet sich im Gleichgewichtszustande, wenn jeder einzelne materielle Punkt desselben im Gleichgewichtszustande sich befindet, d. h. wenn an jedem einzelnen materiellen Punkte die Mittelkraft sämmtlicher auf denselben wirkenden Kräfte gleich Null ist. Mit Zuziehung des in § 47 erklärten Begriffs der mechanischen Arbeit kann man aus der obigen Definition den folgenden Satz ableiten:

Wenn man sich das im Gleichgewichte befindliche System bei seiner gegebenen augenblicklichen Lage in irgend einem Bewegungszustande begriffen denkt, und alsdann die mechanische Arbeit berechnet, welche jede einzelne Kraft während des nächstfolgenden unendlich kleinen Theiles dieser fingirten Bewegung verrichten würde, so muss für die algebraische Summe der von sämmtlichen Kräften verrichteten mechanischen Arbeiten stets die Grösse Null sich ergeben — wie auch immer jener fingirte Bewegungszustand gewählt sein mochte.

Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich unmittelbar aus dem Umstande, dass die oben definirte Arbeitssumme für jeden einzelnen materiellen Punkt den Werth Null hat. Denn für jeden einzelnen materiellen Punkt hat von den beiden Factoren des Productes „Kraft mal Weg“ der eine Factor — nämlich die Mittelkraft der auf den materiellen Punkt wirkenden Kräfte — die Grösse Null; und da nach dem in § 47 bewiesenen Satze die

mechanische Arbeit der Mittelkraft stets gleich der Summe der mechanischen Arbeiten ihrer Seitenkräfte ist, so muss auch die Summe der von sämmtlichen Kräften verrichteten mechanischen Arbeiten gleich Null sein für jeden einzelnen materiellen Punkt, folglich auch für das ganze System. Der obige Satz wird das „Princip der virtuellen Geschwindigkeiten" genannt, insofern die jenem fingirten Bewegungszustande entsprechenden Geschwindigkeiten der einzelnen materiellen Punkte nicht als wirkliche, sondern nur als gedachte, d. h. als „virtuelle" Geschwindigkeiten aufzufassen sind. Wenn man dieses Princip durch eine allgemeine Gleichung ausdrücken wollte, so würde man derselben die Form:

$$1)\quad \mathfrak{A} = 0$$

geben können, indem man sich unter der Grösse $\mathfrak{A}$ die algebraische Summe der von sämmtlichen vorhandenen Kräften bei jener angenommenen unendlich kleinen Verschiebung verrichteten mechanischen Arbeiten vorstellt. Es würde jedoch die zu grosse Allgemeinheit und Unbestimmtheit der Form, in welcher das Princip durch obige Gleichung ausgedrückt wird, dieselbe nur in ungenügendem Grade brauchbar erscheinen lassen für die unmittelbare Verwerthung des Princips zur Lösung mechanischer Aufgaben. Die eigentliche Wirksamkeit des Princips beruht vielmehr auf der specielleren Form, welche man aus der obigen allgemeinen Form ableiten kann, indem man die Grösse $\mathfrak{A}$ in zwei Theile $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zerlegt, deren Bedeutungen auf folgende Weise zu definiren sind.

Wenn man nämlich die sämmtlichen Kräfte, welche auf die einzelnen materiellen Punkte des Systems wirken, in zwei Gruppen zerlegt, und mit $\mathfrak{A}_1$ die von der ersten, mit $\mathfrak{A}_2$ die von der zweiten Kräfte-Gruppe verrichtete Arbeitssumme bezeichnet, so kann man der obigen allgemeinen Gleichung auch die folgende speciellere Form geben:

$$2)\quad \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 = 0,$$

und wenn es sich dann nachweisen lässt, dass der Theil $\mathfrak{A}_2$ für sich allein gleich Null ist, so würde damit zugleich bewiesen sein, dass auch der andere Theil $\mathfrak{A}_1$ für sich gleich Null ist. Eine solche Zerlegung des ganzen Kräfte-Systems in zwei Gruppen kann man nun in der Weise ausführen, dass zu der zweiten Kräfte-Gruppe alle diejenigen Kräfte gerechnet werden, deren Wirksamkeit auch dargestellt und ersetzt werden kann durch gewisse Bedingungsgleichungen, welchen die Coordinaten der materiellen Punkte unter-

worfen sein sollen, während die sämmtlichen übrigen Kräfte zu d
ersten Gruppe gezählt werden. Es lässt sich nun nachweisen, w
in den folgenden Paragraphen gezeigt werden soll, dass in diese
Falle immer die Grösse:

$$3)\quad \mathfrak{A}_2 = 0$$

ist, sobald die virtuellen Verschiebungen der materiellen Punkte
gewählt werden, dass jene für ihre Coordinaten vorgeschrieben
Bedingungsgleichungen dabei erfüllt bleiben. Unter dieser Vorau
setzung kann man daher der obigen allgemeinen Gleichung au
die folgende Form geben:

$$4)\quad \mathfrak{A}_1 = 0.$$

In dieser letzteren Form erst gewinnt das Princip seine eigent
liche Bedeutung für die Mechanik und lautet in Worten ausgedrück
folgendermassen: „Wenn ein System von materiellen Punkten, fü
deren Coordinaten gewisse Bedingungsgleichungen vorgeschriebe
sind, im Gleichgewichtszustande sich befindet, so wird die bei irgen
einer fingirten möglichen, d. h. mit jenen Bedingungen vereinbare
Verschiebung des Systems von den wirkenden Kräften verrichtet
Arbeitssumme stets gleich Null sein".

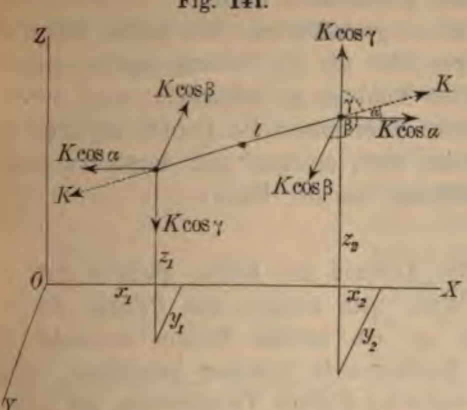
§ 73.

Anwendung des Princips auf ein System von unveränderlich verbundenen materiellen Punkten.

Diejenigen Körper, welche man im gewöhnlichen Leben „fes
Körper" zu nennen pflegt, hat man zu betrachten als Systeme v
materiellen Punkten, welche durch anziehende und abstossen
Kräfte in solcher Weise mit einander verbunden sind, dass all
Formänderungen, d. h. allen Veränderungen der Abstände zwisch
den benachbarten materiellen Punkten, jene Kräfte als Widerstän
entgegenwirken, welche die ursprünglichen Abstände wieder he
zustellen streben. Je zwei materielle Punkte, welche in solch
Weise durch Wechselwirkung mit einander verbunden sind, befind
sich unter Einwirkung von zwei gleich grossen entgegengesetzt
Kräften, welche dieselben in der Richtung ihrer Verbindungsli
auf einander gegenseitig ausüben. Bei den Anwendungen des Pri
cips der virtuellen Geschwindigkeiten ist es erforderlich, die m
chanische Arbeit zu berechnen, welche zwei solche Kräfte K
einer unendlich kleinen Verschiebung ihrer Angriffspunkte v
richten würden.

Wenn man sich die beiden Kräfte K auf die in Fig. 141 angedeutete Art zerlegt und ihre Angriffspunkte so verschoben denkt, dass die Coordinaten derselben um ihre Differenziale sich vergrössern, so erhält man zunächst die folgende Gleichung für die von beiden Kräften zusammen genommen verrichtete mechanische Arbeit:

Fig. 141.



$$\mathfrak{A} = K\cos\alpha(dx_2 - dx_1) + K\cos\beta(dy_2 - dy_1) + K\cos\gamma(dz_2 - dz_1), \text{oder:}$$

$$1)\quad \mathfrak{A} = K\{\cos\alpha(dx_2 - dx_1) + \cos\beta(dy_2 - dy_1) + \cos\gamma(dz_2 - dz_1)\}.$$

Für den ursprünglichen Abstand der beiden Angriffspunkte ergiebt sich ferner aus der Figur die Gleichung:

$$2)\quad l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Indem man diese Gleichung differenziirt, und berücksichtigt, dass die Verbindungslinie der beiden Punkte ebenfalls die Winkel α, β, γ mit den Coordinaten-Achsen einschliesst, gelangt man zu den folgenden Gleichungen:

$$l\,dl = (x_2 - x_1)(dx_2 - dx_1) + (y_2 - y_1)(dy_2 - dy_1) + (z_2 - z_1)(dz_2 - dz_1),$$

$$dl = \left(\frac{x_2 - x_1}{l}\right)(dx_2 - dx_1) + \left(\frac{y_2 - y_1}{l}\right)(dy_2 - dy_1) + \left(\frac{z_2 - z_1}{l}\right)(dz_2 - dz_1),$$

$$3)\quad dl = \cos\alpha(dx_2 - dx_1) + \cos\beta(dy_2 - dy_1) + \cos\gamma(dz_2 - dz_1),$$

und wenn man den in dieser letzteren Gleichung gefundenen Werth für den eingeklammerten Ausdruck in Gleichung 1) substituirt, so nimmt dieselbe die einfachere Form an:

$$4)\quad \mathfrak{A} = K\,dl.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die von den beiden Kräften zusammengenommen verrichtete mechanische Arbeit positiv ist, wenn die beiden Grössen K und dl entweder beide positiv oder beide negativ sind. Die mechanische Arbeit ist dagegen negativ, wenn von den beiden Factoren K und dl der eine positiv, der andere negativ ist. Die Arbeit ist immer gleich Null, wenn $dl = 0$ ist,

d. h. wenn die Verschiebungen der beiden Punkte so gewählt werden, dass ihr Abstand dabei unverändert bleibt.

In solchen Fällen, wo es gestattet ist, den festen Körper als einen absolut festen Körper oder als ein System von unveränderlich verbundenen materiellen Punkten zu behandeln, wird man die Wirkung der Kräfte, welche zwei materielle Punkte derselben auf einander gegenseitig ausüben, auch ersetzen und darstellen können durch eine Bedingungsgleichung von der Form:

5) $dl = 0$,

welche ausdrückt, dass der Abstand der beiden Punkte stets unverändert bleiben soll. Wenn man alsdann das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten auf ein solches System anwendet und mit $\mathfrak{A}_2$ die Summe der mechanischen Arbeiten bezeichnet, welche bei einer angenommenen unendlich kleinen Verschiebung des Systems von jenen inneren Kräften verrichtet werden würde, so ist die Bedingungsgleichung 3) des vorigen Paragraphen stets erfüllt, sobald diese fingirte Verschiebung eine mögliche war, d. h. eine solche, bei welcher die Abstände der materiellen Punkte unverändert bleiben. Man kann also nunmehr die Gleichung 4) des vorigen Paragraphen benutzen, um die Gleichgewichtsbedingungen für die äusseren Kräfte aus derselben abzuleiten.

§ 74.

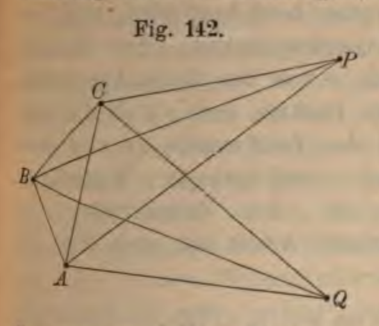
Ableitung der sechs Gleichgewichtsbedingungen für ein System von unveränderlich verbundenen materiellen Punkten.

Bei einem System von unveränderlich verbundenen materiellen Punkten kann — wie im vorigen Paragraphen erklärt wurde — die Wirkung der sämmtlichen inneren Kräfte durch Bedingungsgleichungen ersetzt und dargestellt werden. Die Zahl der hierzu erforderlichen Bedingungsgleichungen beträgt $3n - 6$, wenn n die Anzahl der materiellen Punkte ist. Denn es sind drei Gleichungen erforderlich, um auszudrücken, dass die drei Punkte A, B, C des Systems in unveränderten Abständen von einander bleiben sollen, und es sind fernere $3(n - 3)$ Bedingungsgleichungen erforderlich, um auszudrücken, dass der Abstand jedes der übrigen $n - 3$ Punkte P, Q . . . von jedem der drei ersten unverändert bleiben soll (Fig. 142). Die Gesammtzahl der erforderlichen Bedingungsgleichung ist also:

$$3 + 3(n - 3) = 3n - 6.$$

Da zur Bestimmung der Lage von n Punkten $3n$ Gleichungen erforderlich sein würden, so fehlen zur vollständigen Lagenbestimmung noch 6 Gleichungen, d. h. das System kann trotz jener vorgeschriebenen $3n - 6$ Bedingungsgleichungen noch 6 von einander unabhängige Bewegungen ausführen. Es sind dies die 6 Bewegungen, welche in § 19 bei der Zerlegung der Geschwindigkeiten eines in beliebiger Bewegung begriffenen geometrischen Körpers als Seitenbewegungen gefunden wurden, nämlich drei fortschreitende Bewegungen in den Richtungen der drei Coordinaten-Achsen und drei Drehbewegungen um dieselben. Die Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten auf jede dieser 6 von einander unabhängigen Bewegungen muss daher zu 6 Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht des Systems führen.

Fig. 142.

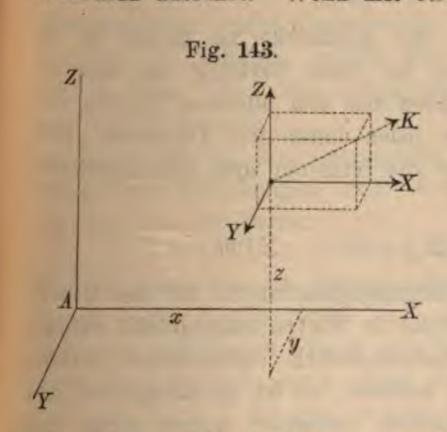


Zu den möglichen Lagenveränderungen des Systems gehört jedenfalls eine solche Verschiebung derselben, bei welcher das ganze System eine fortschreitende Bewegung in der Richtung der Achse AX ausführt. Wenn mit δx die allen Punkten gemeinsame Verschiebungsgrösse bezeichnet wird, so ergiebt sich bei der in Fig. 143 angedeuteten Zerlegungsart für die von sämmtlichen äusseren Kräften K zusammengenommen verrichtete mechanische Arbeit der Ausdruck:

$$\mathfrak{A} = \delta x \Sigma(X).$$

Nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten muss dieser Ausdruck gleich Null sein, und wenn man die auf analoge Weise in Bezug auf die beiden anderen Coordinaten-Achsen zu bildenden Ausdrücke ebenfalls gleich Null setzt, so ergeben sich als die ersten drei allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen die folgenden Gleichungen:

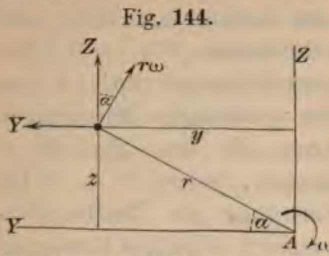
Fig. 143.



$$\Sigma(X) = 0, \qquad \Sigma(Y) = 0, \qquad \Sigma(Z) = 0.$$

Zu den möglichen Verschiebungen gehört ferner eine Drehung des ganzen Systems um die Achse AX. Wenn mit ω die Geschwindigkeit dieser fingirten Drehbewegung bezeichnet wird, so ist $r\omega$ die Geschwindigkeit eines im Abstande r von der Drehachse befindlichen Punktes, und $r\omega dt$ die während des Zeitelements dt von demselben zurückgelegte Wegeslänge. Die von den Seitenkräften der Kraft K hierbei verrichtete mechanische Arbeit hat nach Fig. 144 die Grösse:

Fig. 144.



$$Z \,.\, r\,\omega\, dt \,.\, \cos\alpha - Y \,.\, r\,\omega\, dt \sin\alpha = \omega\, dt\,(Zy - Yz).$$

Den Ausdruck $Zy - Yz$ (für welchen man auch das Product aus der Mittelkraft von den beiden Kräften Z, Y in den Abstand ihrer Richtungslinie von der Drehachse setzen kann, nennt man das statische Moment der Kraft K in Bezug auf die Drehachse AX. Wenn man dieses statische Moment mit $\mathfrak{M}_x$ bezeichnet, so ergiebt sich für die von sämmtlichen äusseren Kräften zusammengenommen verrichtete Arbeit der Ausdruck:

$$\mathfrak{A} = \omega\, dt\, \Sigma\,(\mathfrak{M}_x).$$

Auf analoge Weise sind die Ausdrücke zu bilden für die mechanischen Arbeiten, welche bei einer Drehung um eine der beiden anderen Coordinaten-Achsen von den äusseren Kräften verrichtet werden, und wenn man jeden dieser drei Ausdrücke gleich Null setzt, so erhält man für die letzteren drei Gleichgewichtsbedingungen die Gleichungen:

$$\Sigma\,(\mathfrak{M}_x) = 0, \qquad \Sigma\,(\mathfrak{M}_y) = 0, \qquad \Sigma\,(\mathfrak{M}_z) = 0.$$

Die gefundenen sechs Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht können auf folgende Weise in Worten ausgedrückt werden:

„Wenn ein System von unveränderlich verbundenen Punkten im Gleichgewichtszustande sich befindet, so ist in Bezug auf jede von drei rechtwinkelig zu einander stehenden Achsen nicht nur die algebraische Summe der bei rechtwinkeliger Zerlegung in diese Richtung fallenden Seitenkräfte der äusseren Kräfte gleich Null, sondern auch die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher äusseren Kräfte in Bezug auf dieselbe gleich Null".

§ 75.

Beispiele von anderen Kräften, deren Wirksamkeit durch Bedingungsgleichungen ersetzt werden kann.

Zu den Fällen, in welchen einige von den wirkenden Kräften durch Bedingungsgleichungen ausgedrückt werden können, gehört auch derjenige Fall, in welchem einzelne von den materiellen Punkten des Systems als feste Punkte zu betrachten sind. Wenn einer der materiellen Punkte durch äussere Kräfte in solcher Weise festgehalten wird, dass jede andere Kraft, welche denselben in Bewegung zu setzen strebt, aufgehoben wird durch einen gleich grossen entgegengesetzten Widerstand, so kann man das Vorhandensein einer solchen Widerstandskraft auch darstellen durch drei Bedingungsgleichungen, welche man erhält, indem man jede von den drei Coordinaten des materiellen Punktes einer constanten Grösse gleichsetzt, also durch Gleichungen von der Form:

$$x = a, \qquad y = b, \qquad z = c.$$

Denkt man sich alsdann dem Systeme eine mögliche Verschiebung ertheilt, d. h. eine Verschiebung, bei welcher die obigen drei Gleichungen erfüllt bleiben, so erkennt man, dass die von jener Widerstandskraft verrichtete mechanische Arbeit immer gleich Null ist, sofern ihr Angriffspunkt dabei im Ruhestande bleibt. Es ist also bei den Anwendungen des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten nicht erforderlich, auf jene Widerstandskräfte Rücksicht zu nehmen, sobald die Verschiebung des Systems so gewählt wird, dass die vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen dabei erfüllt bleiben.

Wäre für die drei Coordinaten des materiellen Punktes statt obiger drei Gleichungen nur eine Bedingungsgleichung vorgeschrieben von der Form:

$$F(x, y, z) = 0,$$

so würde dadurch die Beweglichkeit des materiellen Punktes in solcher Weise eingeschränkt, dass derselbe nur in der durch diese Gleichung bestimmten Fläche sich bewegen kann. Diejenige Kraft, deren Wirksamkeit durch diese Bedingungsgleichung dargestellt wird, ist nach § 50 eine rechtwinkelig zu der Fläche gerichtete Widerstandskraft, welche so lange keine mechanische Arbeit verrichtet, als ihr Angriffspunkt in jener Fläche bleibt, und daher unberücksichtigt gelassen werden darf, sobald eine jener Bedingungsgleichung entsprechende Verschiebung des ganzen Systems gewählt wird.

Denkt man sich in Fig. **141** die zwei materiellen Punkte zu zwei verschiedenen Systemen von unveränderlich verbundenen materiellen Punkten gehörend, so erkennt man, dass der dort bewiesene Satz auch angewendet werden kann auf den Fall, in welchem zwei feste Körper in der Weise mit einander verbunden sind, dass der Punkt A des einen, und der Punkt B des anderen stets in gleichem Abstande von einander zu bleiben gezwungen sind. In Wirklichkeit sind es die zwei Kräfte K, welche den Abstand unverändert erhalten. Die Wirksamkeit dieser Kräfte kann aber auch dargestellt werden durch die Bedingungsgleichung 2) des § 73, wenn darin l eine constante Grösse bedeutet. Der Fall, in welchem diese constante Grösse den Werth Null hat, ist dabei nicht ausgeschlossen. Es kann daher das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in der oben erwähnten Weise auch angewendet werden auf ein aus mehreren Systemen unveränderlich verbundener materieller Punkte zusammengesetztes System, in welchem die einzelnen Systeme so mit einander verbunden sind, dass ein materieller Punkt des einen und ein materieller Punkt eines anderen Systems mit einander zusammenfallend in untrennbarer Vereinigung zu bleiben gezwungen sind. Immer wird die bei einer Verschiebung des ganzen Systems von jenen durch Bedingungsgleichungen ausdrückbaren Kräften verrichtete mechanische Arbeit gleich Null sein, sobald die Verschiebung so gewählt wurde, dass jene Bedingungsgleichungen dabei erfüllt bleiben.

§ 76.

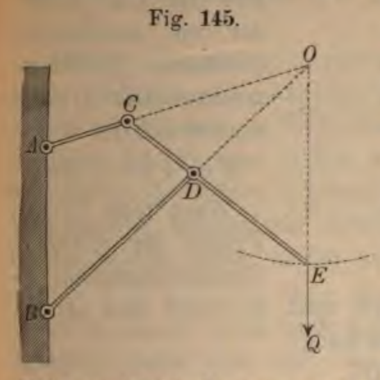
Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten auf statische Aufgaben. Barclay'scher Krahn. Roberval'sche Wage.

Dieselben Fälle, welche in § 9 als Beispiele für die Theorie des augenblicklichen Drehpunktes gewählt wurden, können auch als Beispiele für die Anwendungen des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten benutzt werden.

Um z. B. bei der in Fig. **145** dargestellten Verbindung von drei als gewichtlos zu betrachtenden Stangen (dem Barclay'schen Krahne) die Stelle E zu finden, welche an der Stange CE als Aufhängepunkt für das Gewicht Q gewählt werden müsste, wenn das Stangensystem dabei im Gleichgewichtszustande bleiben soll, hat man für die Bewegung der Stange CE den augenblicklichen Drehpunkt O zu construiren, und den Durchschnittspunkt der durch

diesen Punkt O gelegten Verticalen mit der Linie EC aufzusuchen. Denn der auf solche Weise gefundene Punkt E ist unter allen Punkten der Stange CE der einzige, welcher anfangs in horizontaler Richtung, also rechtwinkelig zur Richtung der Kraft Q sich bewegen würde, wenn das Stangensystem den Bedingungen seiner Zusammensetzung und Befestigung gemäss in seiner Ebene verschoben würde. Der Punkt E ist also der einzige, welcher der durch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten gegebenen Gleichgewichtsbedingung genügt, nach welcher die bei einer unendlich kleinen möglichen Verschiebung von den wirkenden Kräften verrichtete Gesammt-Arbeit gleich Null sein soll.

Fig. 145.

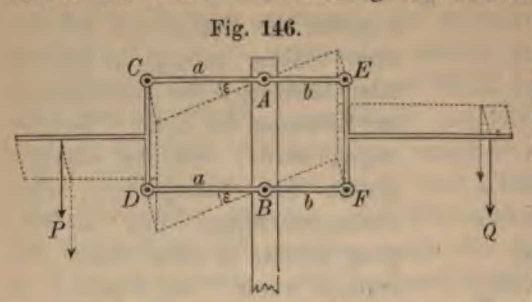


Zu den Kräften, deren Wirksamkeit durch Bedingungsgleichungen dargestellt werden kann, würden im vorliegenden Falle zu rechnen sein: erstens alle die Kräfte, durch welche die Abstände von je zwei materiellen Punkten einer und derselben Stange unverändert erhalten werden, zweitens die in den beiden Gelenkpunkten C, D wirkenden Kräfte, welche bewirken, dass die in jedem derselben vereinigten zwei materiellen Punkte von je zwei verschiedenen Stangen daselbst untrennbar verbunden bleiben, drittens die Widerstände der beiden festen Unterstützungspunkte A und B. Auf alle diese Kräfte brauchte bei Anwendung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten keine Rücksicht genommen zu werden, weil die oben angenommene Verschiebung des ganzen Systems eine mögliche war, d. h. eine Verschiebung, bei welcher die betreffenden Bedingungen erfüllt bleiben.

Auf analoge Weise hat man zu verfahren, um bei der in Fig. **146** dargestellten Stangenverbindung (der Roberval'schen Wage) die Bedingungen des Gleichgewichts für die beiden Gewichte P und Q zu finden. Als einzige mögliche Lagenveränderung des Stangensystems ist im vorliegenden Falle eine solche Verschiebung derselben zu betrachten, bei welcher die Stangen CE und DF resp. um ihre festen horizontalen Drehachsen A und B sich drehen. Denkt man sich durch eine Drehung um den unendlich kleinen Winkel ε das Stangensystem in die punktirte Lage übergehend,

so erkennt man, dass die beiden Kräfte P, Q die einzigen sind, welche bei dieser Verschiebung mechanische Arbeit verrichteten, und für die Summe der von sämmtlichen Kräften verrichteten mechanischen Arbeiten ergiebt sich der Werth:

Fig. 146.



$$\mathfrak{A} = Pa\varepsilon - Qb\varepsilon.$$

Wenn man — dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten gemäss — diesen Ausdruck gleich Null setzt, so erhält man als Bedingung des Gleichgewichts die Gleichung:

$$Pa = Qb.$$

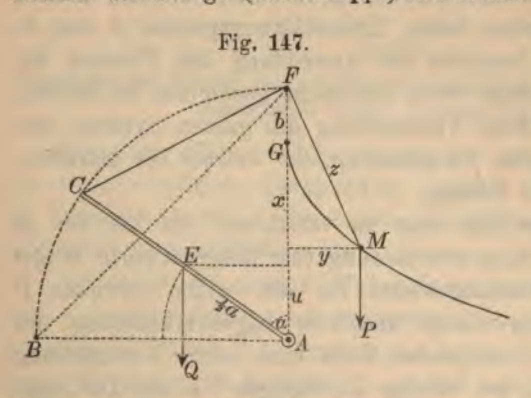
Dieselbe Gleichung würde auch für eine von der Horizontalen abweichende Lage der Stangen CE und DF die Bedingung des Gleichgewichts ausdrücken.

§ 77.

Berechnung der Gleitcurve für das Gegengewicht einer Zugbrücke.

Zu den Kräften, welche durch Bedingungsgleichungen ausgedrückt werden können, gehören bei dem in Fig. 147 dargestellten Systeme: erstens die Kräfte, durch welche je zwei materielle Punkte der Stange (oder Klappe) AC in unveränderlichem Abstande von einander erhalten werden, zweitens die Kräfte, welche deren horizontale Drehachse A unbeweglich erhalten, drittens der normale Gegendruck der festen Curve FM, welche dem materiellen Punkte M als Bahnlinie vorgeschrieben ist. Es sind ferner die beiden Punkte C und M durch einen Faden mit einander verbunden, der bei F über eine Rolle läuft, und die Kräfte, welche durch diesen Faden auf die beiden Punkte C, M übertragen werden,

Fig. 147.



können ebenfalls durch eine Bedingungsgleichung ausgedrückt werden, nämlich durch eine Gleichung, welche ausdrückt, dass die Summe der beiden Entfernungen CF und FM eine constante Grösse bilden soll.

Denkt man sich dem ganzen Systeme eine diesen vorgeschriebenen Bedingungen genügende unendlich kleine Verschiebung ertheilt, bei welcher die Höhe des Punktes E um du zunimmt und die Höhe des Punktes M um dx abnimmt, so erkennt man, dass es lediglich die beiden Gewichte P und Q sind, welche bei dieser Verschiebung mechanische Arbeiten verrichten, und es ergiebt sich für die Summe dieser beiden Arbeiten der Werth:

$$\mathfrak{A} = P dx - Q du.$$

Dieser Ausdruck muss nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten gleich Null sein, wenn bei jeder Lage des Systems die beiden Kräfte P und Q einander im Geichgewichte halten sollen. Es ist also:

$$P dx = Q du.$$

Wenn man diese Gleichung integrirt und dabei berücksichtigt, dass für $u = 0$ auch $x = 0$ wird, so erhält man die Gleichung:

$$Px = Qu,$$

welche nach Substitution des aus der Figur zu entnehmenden Werthes $u = \frac{1}{2} a \cos \alpha$ die Form annimmt:

$$1) \quad Px = Q \frac{a}{2} \cos \alpha.$$

Denkt man sich das ganze System ein anderes Mal in seiner Anfangslage, bei welcher die Stange AC horizontal und der Fadentheil FM vertical gerichtet war, so erhält man als Bedingung des Gleichgewichts für diese Lage die Gleichung:

$$2) \quad P \frac{a}{\sqrt{2}} = Q \frac{a}{2},$$

und nach Substitution des aus dieser Gleichung für Q zu entnehmenden Werthes nimmt die Gleichung 1) für $\cos \alpha$ aufgelöst die Form an:

$$3) \quad \cos \alpha = \frac{x}{a} \sqrt{2}.$$

Für die als gegeben zu betrachtende unveränderliche Länge des ganzen Fadens erhält man, je nachdem man dieselbe für die eine oder die andere der beiden Stellungen berechnet, die Werthe:

$$4)\quad L = z + 2a \sin\frac{\alpha}{2} = b + a\sqrt{2}.$$

In dieser Gleichung kann man die Grösse $\sin\frac{\alpha}{2}$ auch durch den oben für $\cos\alpha$ gefundenen Werth ausdrücken, indem man setzt:

$$5)\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{a\sqrt{2}}}.$$

Wenn man nach Substitution dieses Werthes alsdann die Gleichung 4) für z auflöst, so erhält man die Gleichung:

$$6)\quad z = L - \sqrt{2a(a - x\sqrt{2})},$$

nach welcher man für jeden willkürlich angenommenen Werth von x den zugehörigen Werth von z berechnen und die Curve GM construiren kann.

Um aus dieser Gleichung die Ordinate y als Function von x darzustellen, würde man:

$$7)\quad y = \sqrt{z^2 - (x+b)^2}$$

zu setzen, und in dieser Gleichung für z den oben gefundenen Werth zu substituiren haben.

Capitel XII.

Bewegung eines freien Systems von materiellen Punkten.

§ 78.

d'Alembert's Princip.

Wenn ein System von materiellen Punkten im Gleichgewichtszustande sich befindet, so ist die Beschleunigung jedes einzelnen zu demselben gehörenden materiellen Punktes gleich Null; denn an jedem einzelnen materiellen Punkte hat die Mittelkraft von sämmtlichen auf denselben wirkenden Kräften die Grösse Null. Wenn dagegen die Bedingungen des Gleichgewichts nicht erfüllt sind, so wird im Allgemeinen jeder einzelne materielle Punkt eine gewisse Beschleunigung besitzen, welche demselben durch die von Null verschiedene Mittelkraft der auf ihn einwirkenden Kräfte ertheilt wird, und welche man ihrer Grösse nach erhält, indem man diese Mittelkraft durch die Masse des materiellen Punktes dividirt. Es bedürfte daher, um den materiellen Punkt in dem

Gleichgewichtszustand zu versetzen, der Hinzufügung einer neuen Kraft, welche jener Mittelkraft gleich und entgegengesetzt, also ihrer Grösse nach gleich dem Producte aus der Masse des materiellen Punktes in seine Beschleunigung ist. In diesem Satze ist das d'Alembert'sche Princip ausgesprochen, welches kürzer ausgedrückt folgendermassen lautet:

„Die den Beschleunigungen der einzelnen materiellen Punkte entsprechenden Kräfte, in entgegengesetzten Richtungen hinzugefügt, würden mit den wirklich vorhandenen Kräften zusammen das System im Gleichgewicht halten."

Mit Hülfe des d'Alembert'schen Princips kann man die „Dynamik" (oder die Lehre von der Bewegung eines Systems von materiellen Punkten) zurückführen auf die „Statik" (oder die Lehre vom Gleichgewichte). Die Zuziehung dieses Princips macht es möglich, das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten nunmehr auch anzuwenden auf ein nicht im Gleichgewichtszustande befindliches System.

Wenn mit m die Masse und mit x, y, z die Coordinaten eines der materiellen Punkte bezeichnet werden, so stellen die Ausdrücke:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}$$

die Grössen der drei Seitenkräfte dar von der nach obigem Principe an diesem materiellen Punkte neu hinzuzufügende Kraft, und die Richtungen dieser drei Seitenkräfte sind den drei Seitenbeschleunigungen entgegengesetzt zu nehmen.

Bei den Anwendungen des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten sollten nach den Erklärungen des vorigen Capitels die sämmtlich vorhandenen Kräfte in zwei Gruppen zerlegt werden, von denen die eine alle diejenigen Kräfte enthält, deren Wirksamkeit auch durch Bedingungsgleichungen dargestellt werden kann. Wenn also mit X, Y, Z, die drei Seitenkräfte von derjenigen Kraft bezeichnet werden, welche man erhält, indem man die auf jenen materiellen Punkt wirkenden Kräfte — mit Ausschluss der durch Bedingungsgleichungen ausdrückbaren — sämmtlich zu einer Mittelkraft zusammensetzt, so sind:

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2}$$

die von diesem einen materiellen Punkte herrührenden Beiträge

zu dem ganzen Kräfte-Systeme, auf welches nunmehr das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten anzuwenden ist.

Wenn man sich also dem ganzen Systeme von materiellen Punkten eine mit jenen Bedingungsgleichungen vereinbare unendlich kleine Verschiebung ertheilt denkt, und mit δx, δy, δz die damit verbundenen Aenderungen der Coordinaten x, y, z bezeichnet — wobei das Zeichen „δ" zum Unterschiede von dem Zeichen „d" darauf hinweisen soll, dass diese willkürlich angenommenen Verschiebungen nicht mit den im nächstfolgenden Zeitelemente dt wirklich eintretenden Verschiebungen verwechselt werden dürfen — so erhält man für die dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten gemäss gleich Null zu setzende algebraische Summe der von sämmtlichen Kräften verrichteten mechanischen Arbeiten die Gleichung:

$$0 = \Sigma\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}.$$

Diese aus der Verbindung des d'Alembert'schen Princips mit dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten hervorgegangene Gleichung kann als die Grundgleichung der Mechanik betrachtet werden, insofern dieselbe in allgemeinster Form alle Fälle der Bewegung und des Gleichgewichts eines beliebigen Systems von materiellen Punkten als specielle Fälle einschliesst.

Die Kräfte, auf welche oben die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen angewendet werden, können auch aufgefasst werden als Theile der Seitenkräfte X, Y, Z, nämlich als diejenigen Theile, welche durch den Einfluss der vorgeschriebenen Bedingungen aufgehoben werden. Es kann daher das d'Alembert'sche Princip auch in folgender Form ausgesprochen werden: „Die durch den Einfluss der vorgeschriebenen Bedingungen aufgehobenen Kräfte würden, wenn sie allein wirkten, das System im Gleichgewicht halten".

§ 79.

Gesetz des Schwerpunktes.

Unter den Kräften, welche sich durch Bedingungsgleichungen ausdrücken lassen, können zwei verschiedene Arten unterschieden werden, nämlich erstens solche Kräfte, welche die materiellen Punkte des Systems auf einander gegenseitig ausüben, zweitens solche Kräfte, welche als Widerstände von festen Flächen, Linien oder Punkten ausgehen. Es soll die im vorigen Paragraphen gefundene allgemeine Gleichung zunächst auf den Fall angewendet werden, in welchem ausschliesslich Bedingungsgleichungen der ersten

Art vorhanden sind. Man nennt das System in diesem Falle ein „freies System“, insofern zu den möglichen Lagenveränderungen desselben auch eine in beliebiger Richtung stattfindende fortschreitende Bewegung des ganzen Systems gehören würde, oder eine solche Verschiebung, bei welcher sämmtliche materielle Punkte in einer und derselben Richtung eine und dieselbe Wegeslänge zurücklegen.

Denkt man sich diese Verschiebung das eine Mal in der Richtung der X-Achse stattfindend und in solcher Weise ausgeführt, dass alle materiellen Punkte des Systems gemeinschaftlich die unendlich kleine Wegeslänge δx dabei zurücklegen, so erkennt man, dass in der allgemeinen Gleichung des vorigen Paragraphen für diesen Fall jede der beiden Grössen δy, δz gleich Null, und die Grösse δx vor das Summationszeichen zu setzen sein würde. Auf analoge Weise erhält man die betreffenden Gleichungen in Bezug auf die beiden anderen Coordinaten-Achsen, indem man sich allen Punkten ein anderes Mal in der Richtung der Y-Achse die gemeinsame Verschiebung δy, und ein drittes Mal in der Richtung der Z-Achse die gemeinsame Verschiebung δz ertheilt denkt. Die obige allgemeine Gleichung zerfällt daher in die folgenden drei Gleichungen:

$$0 = \delta x \Sigma\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right), \quad 0 = \delta y \Sigma\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right),$$
$$0 = \delta z \Sigma\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

welchen man nach Fortlassung der ausserhalb der Summationszeichen stehenden Factoren δx, δy, δz auch die folgenden Formen geben kann:

$$1) \quad \Sigma\left(m\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma(X), \quad \Sigma\left(m\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma(Y), \quad \Sigma\left(m\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma(Z).$$

Derjenige Punkt, dessen Coordinaten x_0, y_0, z_0 durch die folgenden drei Gleichungen gegeben sind:

$$2) \quad x_0 = \frac{\Sigma(mx)}{\Sigma(m)}, \quad y_0 = \frac{\Sigma(my)}{\Sigma(m)}, \quad z_0 = \frac{\Sigma(mz)}{\Sigma(m)},$$

wird der Schwerpunkt des Systems von materiellen Punkten genannt. Indem man diese Gleichungen zweimal nach der Zeit t differenziirt, gelangt man zu folgenden Gleichungen resp. für die Seitengeschwindigkeiten und die Seitenbeschleunigungen des Schwerpunktes:

$$3)\quad \frac{dx_0}{dt}=\frac{\Sigma\left(m\frac{dx}{dt}\right)}{\Sigma(m)},\quad \frac{dy_0}{dt}=\frac{\Sigma\left(m\frac{dy}{dt}\right)}{\Sigma(m)},\quad \frac{dz_0}{dt}=\frac{\Sigma\left(m\frac{dz}{dt}\right)}{\Sigma(m)},$$

$$4)\quad \frac{d^2x_0}{dt^2}=\frac{\Sigma\left(m\frac{d^2x}{dt^2}\right)}{\Sigma(m)},\quad \frac{d^2y_0}{dt^2}=\frac{\Sigma\left(m\frac{d^2y}{dt^2}\right)}{\Sigma(m)},\quad \frac{d^2z_0}{dt^2}=\frac{\Sigma\left(m\frac{d^2z}{dt^2}\right)}{\Sigma(m)}.$$

Wenn man in den letzteren drei Gleichungen für die Zähler der auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke die in den Gleichungen 1) gefundenen Werthe substituirt, so erhält man für die drei Seitenbeschleunigungen des Schwerpunktes die folgenden Gleichungen:

$$5)\quad \frac{d^2x_0}{dt^2}=\frac{\Sigma(X)}{\Sigma(m)},\quad \frac{d^2y_0}{dt^2}=\frac{\Sigma(Y)}{\Sigma(m)},\quad \frac{d^2z_0}{dt^2}=\frac{\Sigma(Z)}{\Sigma(m)}.$$

In diesen drei Gleichungen ist das Gesetz des Schwerpunktes enthalten, welches in Worten ausgedrückt folgendermassen lautet: „Der Schwerpunkt eines beliebigen freien Systems von materiellen Punkten bewegt sich gerade so wie ein einfacher materieller Punkt sich bewegen würde, wenn in ihm die Massen aller materiellen Punkte des Systems und die Angriffspunkte aller Kräfte vereinigt wären".

Wenn man $\frac{dx}{dt}=v_x$ und demgemäss $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv_x}{dt}$ setzt, so kann man der Gleichung 1) auch die folgende Form geben:

$$6)\quad \frac{d\Sigma(mv_x)}{dt}=\Sigma(X).$$

Hierin bedeutet $\Sigma(mv_x)$ die Summe der Bewegungsgrössen des Systems in Bezug auf die Richtung der X-Achse. Die obige Gleichung enthält daher den folgenden Satz: „Die Geschwindigkeit, mit welcher die gesammte Bewegungsgrösse in Bezug auf eine bestimmte Achsenrichtung zunimmt, ist gleich der in dieser Richtung wirkenden Kraftsumme". Wenn also die letztere gleich Null ist so bleibt die erstere constant.

§ 80.

Anwendungen dieses Gesetzes auf specielle Fälle.

Aus dem im vorigen Paragraphen gefundenen Gesetze folgt, dass der Schwerpunkt des Systems geradlinig und gleichförmig sich bewegt, wenn von den drei Kräfte-Summen $\Sigma(X)$, $\Sigma(Y)$, $\Sigma(Z)$

eine jede für sich gleich Null ist, da in diesem Falle jede von den drei Seitenbeschleunigungen des Schwerpunktes gleich Null wird. Dieser Fall tritt zum Beispiel ein, wenn die Bewegung des Systems ausschliesslich unter Einwirkung von inneren Kräften erfolgt, d. h. von solchen Kräften, welche die einzelnen materiellen Punkte des Systems auf einander gegenseitig ausüben, insofern nach dem Gesetze der Wechselwirkung diese Kräfte paarweise einander gleich und entgegengesetzt sind, folglich im Schwerpunkte angreifend einander aufheben würden. Da durch die inneren Kräfte keine Beschleunigung des Schwerpunktes hervorgebracht werden kann, so wird auch eine Aenderung der inneren Kräfte die Bewegung des Schwerpunktes nicht beeinflussen können.

Hieraus folgt z. B., dass bei dem Stosse zweier oder mehrerer Körper gegen einander die Bewegung ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes nicht verändert wird, da die Drücke, welche die Körper an den Berührungsstellen auf einander gegenseitig übertragen, in Bezug auf das ganze aus diesen Körpern gebildete System als innere Kräfte zu betrachten sind.

Wenn eine Bombe an irgend einer Stelle ihrer parabolischen Flugbahn explodirt, so wird der Schwerpunkt die parabolische Bewegung in unveränderter Weise fortsetzen, da die Repulsivkräfte, durch welche die Stücke auseinander geschleudert werden, als innere Kräfte keinen Einfluss auf die Bewegung des Schwerpunktes haben.

Wenn in den Richtungen der X-Achse und der Y-Achse keine äussere Kräfte vorhanden sind, so wird nur in der Richtung der Z-Achse eine Geschwindigkeitsänderung des Schwerpunktes hervorgebracht werden können, und wenn in den Richtungen der ersteren beiden Achsen die Seitengeschwindigkeiten des Schwerpunktes anfangs gleich Null waren, so werden dieselben immer Null bleiben. Es geschieht daher in diesem Falle die Bewegung des Systems auf solche Weise, dass die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\Sigma\left(m\frac{dx}{dt}\right) = 0, \qquad \Sigma\left(m\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

stets erfüllt bleiben, d. h. wenn für einige von den materiellen Punkten die Produkte $m\frac{dx}{dt}$ und $m\frac{dy}{dt}$ positiv sind, so müssen dieselben nothwendig für andere materielle Punkte negativ sein.

So z. B. würde eine horizontale Bewegung des Schwerpunkts nicht eintreten können, wenn die Gewichte der materiellen Punkte und die Gegendrücke einer vollkommen glatten horizontalen Unterstützungsfläche die einzigen äusseren Kräfte wären, welche auf das System wirken (vergl. § 106). Ein auf vollkommen glatter hori-

zontaler Eisfläche stehender Mensch würde also nicht im Stande sein dem Schwerpunkte seines Körpers eine Horizontalbewegung zu ertheilen — es sei denn, dass er bewegliche Gegenstände bei sich führt, welche er nach der entgegengesetzten Seite hin von sich fort werfen kann. Wohl aber würde er im Stande sein eine Vertikalbewegung seines Schwerpunkts hervorzubringen, insofern er durch die Muskelkraft seiner Beine bewirken kann, dass der Druck zwischen seinen Füssen und der horizontalen Unterstützungsfläche zeitweilig grösser oder kleiner als sein Gewicht wird.

Die Muskelkraft der Beine wirkt bei einem zum Höhensprunge ansetzenden Menschen in ähnlicher Weise wie bei einem starren Körper die Spannkraft einer zwischen ihm und der Bodenfläche befindlichen elastischen Feder wirken würde. Wenn man die Feder als gewichtlos und den Druck, welchen sie nach oben und nach unten ausübt, als eine constante Kraft behandelt, so erhält man nach der in Fig. 148 und Fig. 149 gewählten Bezeichnung, indem man das Gesetz des Schwerpunkts und das Princip der lebendigen Kraft anwendet, die Gleichung:

Fig. 148. Fig. 149. Fig. 150.

$$(D - Mg)h = \frac{MV^2}{2}.$$

Die Geschwindigkeit V, welche der Schwerpunkt erreicht hat in dem Augenblicke, wo die Füsse des Springenden aufhören den Boden zu berühren, entspricht die Steighöhe $H = \frac{V^2}{2g}$ (Fig. 150). Für den Druck, welchen der Springende auf den Boden ausübte, während er zum Sprunge ansetzte, ergiebt sich hiernach der Werth:

$$D = Mg\left(1 + \frac{H}{h}\right),$$

also ein Werth, welcher je nach der aufgewendeten Muskelarbeit beträchtlich grösser sein kann als das Gewicht des Springenden.

Eine Eisdecke, welche gerade stark genug ist um sein ruhendes Körpergewicht zu tragen, würde also unter seinen Füssen brechen, wenn er einen Sprung auszuführen versuchte.

Wenn der Schwerpunkt eines beliebigen Systems von materiellen Punkten eine geradlinige gleichförmige Bewegung ausführt, so kann man daraus schliessen, dass in Bezug auf jede beliebige Achsenrichtung die algebraische Summe der bei rechtwinkeliger Zerlegung in diese Richtung fallenden Seitenkräfte der äusseren Kräfte gleich Null ist. Es muss folglich auch in Bezug auf die Bewegungsrichtung die Summe der vorwärts wirkenden treibenden gleich der Summe der rückwärts wirkenden verzögernden Kräfte, oder „Kraft" gleich „Widerstand" sein.

Hieraus folgt z. B., dass bei einem in gleichförmiger Bewegung begriffenen Rad-Dampfschiffe der Gegendruck des Wassers gegen die Schaufeln der Räder gleich dem Gesammtwiderstande ist, welcher der Bewegung des Schiffes entgegenwirkt; ebenso, dass bei einem gleichförmig sich bewegenden Eisenbahnzuge der Reibungswiderstand, welcher das Gleiten der Triebräder auf den Schienen verhindert, gleich der Summe aller Widerstände ist, welche der Bewegung des Zuges entgegenwirken.

§ 81.

Schwerpunktsbestimmungen.

Gerade Linie. Kreisbogen. Cycloidenbogen. Halbe Ellipsenfläche. Parabelfläche. Paraboloid-Oberfläche. Elliptisches Paraboloid. Halbes Ellipsoid.

Wenn man die ganze Massensumme eines Systems von materiellen Punkten mit $M = \Sigma(m)$ bezeichnet, so kann man den allgemeinen Schwerpunktsgleichungen 2) des § 79 auch die folgenden Formen geben:

$$1)\quad Mx_0 = \Sigma(mx), \quad My_0 = \Sigma(my), \quad Mz_0 = \Sigma(mz).$$

Es sollen diese allgemeinen Gleichungen angewendet werden auf den Fall, in welchem die ganze Masse stetig und gleichförmig in dem Raume eines geometrischen Körpers vertheilt ist. Man nennt das System in solchem Falle einen „homogenen" Körper, und die in jeder Cubikeinheit enthaltene Masse γ wird die „Dichtigkeit" des Körpers genannt. Wenn mit J der ganze Rauminhalt bezeichnet wird und mit i das unendlich kleine Raumtheilchen, in welchem das Massentheilchen m enthalten ist, so hat man $M = \gamma J$ und $m = \gamma i$ zu setzen in den obigen Gleichungen, welche alsdann die folgenden Formen annehmen:

$$2)\quad Jx_0 = \Sigma(ix), \quad Jy_0 = \Sigma(iy), \quad Jz_0 = \Sigma(iz).$$

Der durch diese Gleichungen bestimmte Punkt wird der Schwerpunkt des „geometrischen Körpers“ genannt.

Auf analoge Weise gelangt man zu dem Begriffe des Schwerpunktes einer geometrischen „Fläche“, indem man sich eine Masse gleichförmig auf diese Fläche vertheilt denkt und mit γ die auf jeder Flächeneinheit enthaltene Masse, mit J den Inhalt der ganzen Fläche und mit i den Inhalt eines unendlich kleinen Flächentheilchens bezeichnet. Ebenso kann man die obigen Gleichungen auch benutzen zur Bestimmung des Schwerpunktes einer geometrischen Linie, indem man den Buchstaben J und i die Bedeutungen von Längengrössen beilegt.

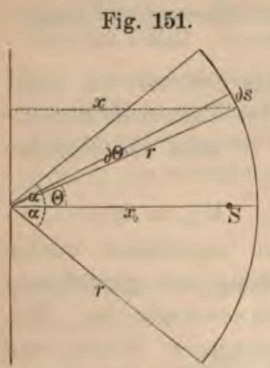
Schwerpunkt der geraden Linie.

Der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt in der Mitte derselben, da in Bezug auf jede durch den Mittelpunkt gelegte Ebene die algebraische Summe der Produkte aus den unendlich kleinen Längentheilchen in ihre Abstände von der Ebene gleich Null ist.

Schwerpunkt des Kreisbogens.

Der Schwerpunkt eines Kreisbogens liegt in der Halbirungslinie des zugehörigen Winkels, da in Bezug auf jede durch diese Linie gelegte Ebene die algebraische Summe der Produkte aus den Bogentheilchen in ihre Abstände von derselben gleich Null ist. Um den Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte zu bestimmen, hat man zunächst — entsprechend der Bezeichnungsweise der Integralrechnung — der ersten von den drei Gleichungen 2) die folgende folgende Form zu geben:

Fig. 151.



$$x_0 = \frac{\int x\,ds}{\int ds}.$$

In dieser Gleichung bedeutet x den Abstand des Bogenelements ds von einer rechtwinkelig zur Halbirungslinie durch den Mittelpunkt gelegten Ebene. Nach Fig. **151** kann $ds = r\,d\theta$ und $x = r\cos\theta$ gesetzt werden. Folglich ist:

$$\int ds = r\int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta = 2r\alpha \quad \text{und}$$

$$\int x\,ds = r^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\theta\, d\theta = 2r^2 \sin\alpha.$$

Nach Substitution dieser Werthe erhält man für den gesuchten Schwerpunktsabstand den Ausdruck:

$$x_0 = r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Für den Halbkreisbogen ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$ zu setzen, und wird $x_0 = \frac{2r}{\pi}$. Für die ganze Kreisperipherie ist $\alpha = \pi$ und $x_0 = 0$.

Schwerpunkt des Cycloidenbogens.

Für die Coordinaten des Punktes M ergeben sich aus Fig. **152** die Gleichungen:

Fig. 152.

$$x = r(\varphi - \sin\varphi),$$
$$y = r(1 - \cos\varphi),$$
$$dx = r(1 - \cos\varphi)\, d\varphi,$$
$$dy = r \sin\varphi\, d\varphi,$$

und für das Bogenelement ds erhält man — entweder aus den letzteren beiden Gleichungen, oder nach der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes (indem man sich den erzeugenden Kreis mit der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ um den Berührungspunkt N sich drehend denkt, und den daraus für $\frac{ds}{dt}$ sich ergebenden Werth berechnet) — den Ausdruck:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2r \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi.$$

Durch Integration dieser letzteren Gleichung erhält man für die Bogenlänge AM den Werth:

$$\int ds = 2r \int_0^{\varphi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Die Schwerpunktscoordinaten dieses Bogen sind nunmehr zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$x_0 = \frac{\int x\,ds}{\int ds}, \qquad y_0 = \frac{\int y\,ds}{\int ds}.$$

Nach Substitution der Werthe von x und ds nimmt das erste der obigen Integrale die Form an:

$$\int x\,ds = 2r^2\int_0^{\varphi}(\varphi - \sin\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Wenn man in dem Ausdrucke auf der rechten Seite die folgenden Substitutionen ausführt:

$$\varphi - \sin\varphi = u, \qquad (1-\cos\varphi)\,d\varphi = du,$$

$$-2\cos\frac{\varphi}{2} = v, \quad \sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = dv,$$

und alsdann die partielle Integration ausführt nach der Formel:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

so erhält man für das gesuchte Integral die folgende Gleichung:

$$\int x\,ds = 4r^2(\sin\varphi - \varphi)\cos\frac{\varphi}{2} + 8r^2\int_0^{\varphi}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi, \qquad \text{oder:}$$

$$\int x\,ds = 4r^2\left\{(\sin\varphi - \varphi)\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{4}{3}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^3\right\}.$$

In dem anderen Integrale, welches nach Substitution der Werthe von y und ds die Form annimmt:

$$\int y\,ds = 2r^2\int(1-\cos\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,$$

hat man zunächst $\cos\varphi = 2\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2 - 1$ zu setzen, und gelangt alsdann zur Bestimmung desselben durch die folgenden Rechnungsschritte:

$$\int y\,ds = 4r^2\int_0^{\varphi}\left\{1-\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2\right\}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,$$

$$\int y\,ds = 8r^2\left\{\int_0^{\varphi}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \int_0^{\varphi}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\},$$

$$\int y\,ds = 8r^2\left\{1-\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\right\}.$$

Nach Substitution der gefundenen Werthe erhält man für die gesuchten Schwerpunktscoordinaten die Gleichungen:

$$x_0 = r\left\{\frac{(\sin\varphi - \varphi)\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{4}{3}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^3}{1 - \cos\frac{\varphi}{2}}\right\},$$

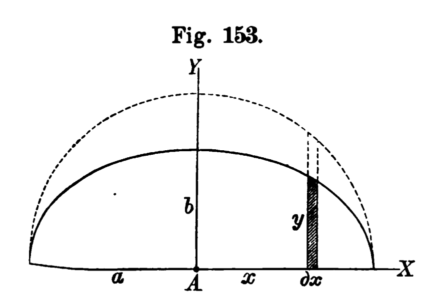
$$y_0 = \frac{2}{3}r\left\{\frac{2 - 3\cos\frac{\varphi}{2} + \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^3}{1 - \cos\frac{\varphi}{2}}\right\}.$$

Wenn man hierin $\varphi = 2\pi$ setzt, so erhält man für die Coordinaten des Schwerpunktes der ganzen Cycloide die Werthe $x_0 = r\pi$ und $y_0 = \frac{4}{3}r$.

Schwerpunkt der halben Ellipsenfläche.

Für den Flächeninhalt F ergiebt sich aus Fig. 153 die Gleichung:

Fig. 153.



$$F = \int y\,dx,$$

welche nach Substitution des aus der Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

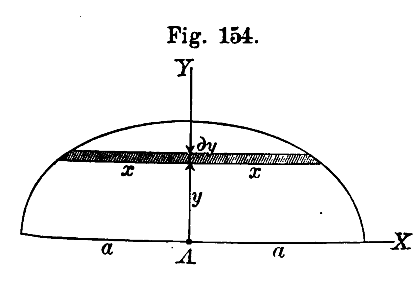
für die Ordinate y zu entnehmenden Werthes die Form annimmt:

$$F = \frac{b}{a}\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Das Integral auf der rechten Seite ist der Ausdruck für den Inhalt der Halbkreisfläche vom Halbmesser a. Also ist:

$$F = \frac{b}{a}\cdot\frac{a^2\pi}{2} = \frac{ab\pi}{2}.$$

Fig. 154.



Um den Abstand des Schwerpunktes von der Achse AX zu bestimmen, hat man sich die ganze Fläche auf die in Fig. 154 angedeutete Art in Streifen vom Flächeninhalte:

$$dF = 2\,x\,dy$$

zerlegt zu denken und der allgemeinen Schwerpunktsgleichung alsdann die Form zu geben:

$$F y_0 = \int d F y = \int_{y=0}^{y=b} 2\, x\, dy\, .\, y.$$

Wenn man die Gleichung der Ellipse differenziirt, so erhält man zur Bestimmung der Grösse $y\, dy$ die Gleichung:

$$\frac{x\, dx}{a^2} + \frac{y\, dy}{b^2} = 0$$

und nach Substitution des hieraus für jene Grösse sich ergebenden Werthes nimmt die obige Gleichung die Form an:

$$F y_0 = -2 \frac{b^2}{a^2} \int_a^0 x^2\, dx = \frac{2}{3}\, a\, b^2.$$

Wenn man hierin für F den gefundenen Werth einsetzt, so erhält man für den gesuchten Schwerpunktsabstand die Gleichung:

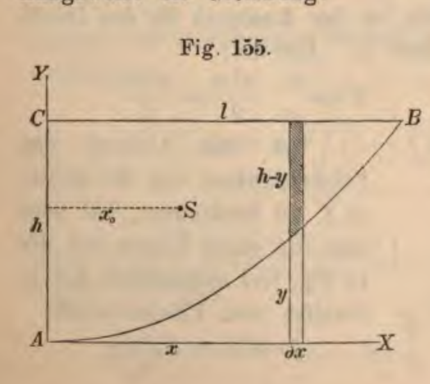
$$\frac{a\, b\, \pi}{2} y_0 = \frac{2}{3}\, a\, b^2, \quad \text{oder:} \quad y_0 = \frac{4}{3} \frac{b}{\pi},$$

welche zeigt, dass dieser Schwerpunktsabstand unabhängig ist von der Grösse der Halbachse a. Wenn man $a = b = r$ setzt, so erhält man als Schwerpunktsabstand der Halbkreisfläche den Werth $y_0 = \frac{4\, r}{3\, \pi}$.

Schwerpunkt der Parabelfläche.

Für die Parabel AB, deren Achse mit der Coordinaten-Achse AY zusammenfällt, gilt nach der in Fig. 155 gewählten Bezeichnungsweise die Gleichung:

Fig. 155.



$$\frac{y}{h} = \frac{x^2}{l^2}, \text{ oder: } dy = \frac{2\, h\, x}{l^2}\, dx.$$

Mit Benutzung derselben erhält man für den Flächeninhalt der Figur den Werth:

$$F = \int (h - y)\, dx$$

$$= \frac{h}{l^2} \int_0^l (l^2 - x^2)\, dx = \frac{2}{3}\, h\, l.$$

Die Schwerpunktscoordinate x_0 ist zu bestimmen aus der Gleichung:

$$F x_0 = \int (h - y)\, x\, dx,$$

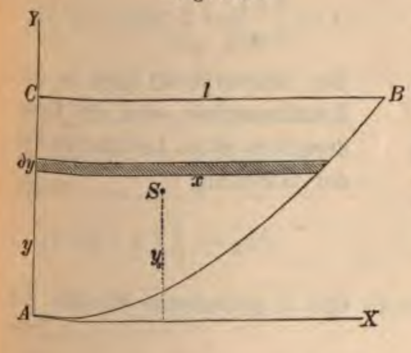
welche nach Substitution der für F und y aus den obigen Gleichungen zu entnehmenden Werthe die Form annimmt:

$$\frac{2}{3} h l x_0 = \frac{h}{l^2} \int_0^l (l^2 - x^2)\, x\, dx, \quad \text{oder:}$$

$$\frac{2}{3} h l x_0 = \frac{h l^2}{4}; \quad \text{also ist } x_0 = \frac{3}{8} l.$$

Um die Schwerpunktscoordinate y_0 zu bestimmen, hat man sich die Fläche auf die in Fig. 156 angedeutete Art in Streifen vom Inhalt $x\, dy$ zerlegt zu denken und die folgende Gleichung aufzustellen:

Fig. 156.



$$F y_0 = \int x\, dy \,.\, y,$$

in welcher für die Grössen y, dy und F die gefundenen Werthe zu substituiren sind. Man erhält dann die Gleichungen:

$$\frac{2}{3} h l \,.\, y_0 = \frac{2 h^2}{l^4} \int_0^l x^4\, dx,$$

$$\frac{2}{3} h l y_0 = \frac{2}{5} h^2 l, \quad \text{oder:} \quad y_0 = \frac{3}{5} h.$$

Schwerpunkt der Paraboloid-Oberfläche.

Wenn man in der obigen Gleichung der Parabel das Verhältniss:

$$\frac{l^2}{2h} = a$$

setzt, so kann man derselben auch die folgende Form geben:

$$x^2 = 2 a y, \quad \text{oder:} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{a}.$$

Der Inhalt der Paraboloid-Oberfläche, welche von der Parabel beschrieben wird, wenn dieselbe um die Achse AY gedreht wird, hat nach Fig. 157 die Grösse:

$$J = \int 2 x \pi \, ds.$$

Für das Bogenelement ds erhält man mit Benutzung der obigen Gleichung der Parabel den Werth:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}},$$

und nach Substitution dieses Werthes nimmt die vorige Gleichung die folgende Form an:

$$J = 2\pi \int x \, dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2\pi}{3a} \int_0^l \frac{3}{2} (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} 2 x \, dx, \quad \text{oder:}$$

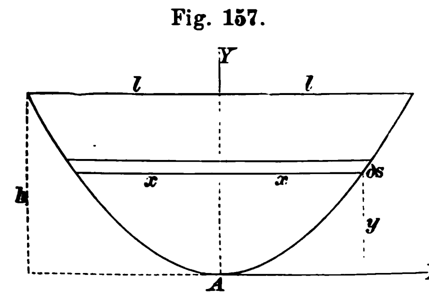


Fig. 157.

$$J = \frac{2\pi}{3a} \left\{ (a^2 + l^2)^{\frac{3}{2}} - a^3 \right\}.$$

Der Schwerpunkt liegt in der Rotationsachse, und die Höhe desselben ist zu bestimmen aus der Gleichung:

$$J y_0 = \int 2 x \pi y \, ds,$$

welche nach Substitution der für ds und y gefundenen Werthe die Form annimmt:

$$J y_0 = \frac{\pi}{a^2} \int x^3 \, dx \sqrt{a^2 + x^2}, \quad \text{oder:}$$

$$J y_0 = \frac{\pi}{3a^2} \int_0^l x^2 \, d\left\{ (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

Wenn man auf dieses Integral wieder die bei der Schwerpunktsbestimmung für den Cycloidenbogen benutzte Formel der partiellen Integration anwendet, so erhält man die Gleichung:

$$J y_0 = \frac{\pi}{3a^2} \left\{ (a^2 + l^2)^{\frac{3}{2}} l^2 - \int_0^l (a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot 2 x \, dx \right\}, \quad \text{oder:}$$

$$J y_0 = \frac{\pi}{3a^2}\left\{(a^2+l^2)^{\frac{3}{2}} l^2 - \frac{2}{5}\left[(a^2+l^2)^{\frac{5}{2}} - a^5\right]\right\}.$$

Nach Substitution des oben gefundenen Werthes von J nimmt diese Gleichung für y_0 aufgelöst die folgende Form an:

$$y_0 = \frac{l^2(a^2+l^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}\left[(a^2+l^2)^{\frac{5}{2}} - a^5\right]}{2a\left[(a^2+l^2)^{\frac{3}{2}} - a^3\right]}.$$

Schwerpunkt des elliptischen Paraboloids.

Die Durchschnittslinien, in welchen die Oberfläche des in Fig. 158 dargestellten elliptischen Paraboloids von den Ebenen AXZ und AYZ geschnitten wird, sind Parabeln, und die Gleichungen dieser Hauptschnitte sind:

Fig. 158.

$$\frac{z}{h} = \frac{u^2}{a^2} = \frac{v^2}{b^2}.$$

Wenn man abkürzungsweise $\frac{a^2}{h} = p$ und $\frac{b^2}{h} = q$ setzt, so kann man diesen Gleichungen auch die Formen geben:

$$u = \sqrt{pz}, \quad v = \sqrt{qz}.$$

Eine in der Höhe z über dem Scheitelpunkte rechtwinkelig zur Achse AZ hindurchgelegte Ebene schneidet die Oberfläche in einer Ellipse, deren Halbachsen u und v sind. Um den Rauminhalt des ganzen Körpers zu berechnen, hat man sich durch derartige Ebenen den Körper in elliptische Scheiben zerschnitten zu denken von der Dicke dz und dem Inhalt:

$$dJ = uv\pi dz = \sqrt{pz}\ \sqrt{qz}\,.\,\pi dz,$$

worauf man durch Integration zwischen den Grenzen 0 und h die Gleichung erhält:

$$J = \pi \sqrt{pq} \int_0^h z\,dz = \pi \sqrt{pq} \cdot \frac{h^2}{2} = \frac{ab\pi h}{2}.$$

Die Höhe des Schwerpunktes über dem Scheitelpunkte findet man aus der Gleichung:

$$J z_0 = \int_0^h dJ \,.\, z,$$

indem man darin fur dJ den gefundenen Werth substituirt. Man erhält dann die Gleichung:

$$J z_0 = \pi \sqrt{pq} \int_0^h z^2 dz, \quad \text{oder:}$$

$$J z_0 = \pi \sqrt{pq} \frac{h^3}{3}.$$

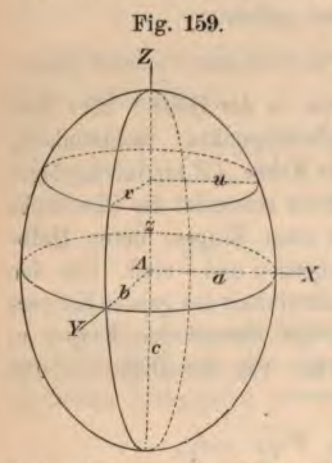
Nach Einsetzung des oben für J gefundenen Ausdrucks liefert diese Gleichung für z_0 den Werth:

$$z_0 = \frac{2}{3} h.$$

Schwerpunkt des halben Ellipsoids.

Die Durchschnittslinie, in welcher die Oberfläche des in Fig. 159 dargestellten Ellipsoids von der Coordinaten-Ebene AXZ geschnitten wird, ist eine Ellipse mit den Halbachsen a, c. Die Durchschnittslinie, in welcher dieselbe von der Ebene AYZ geschnitten wird, ist eine Ellipse mit den Halbachsen b, c. Die Gleichungen dieser beiden Hauptschnitte sind:

Fig. 159.



$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{v^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Den körperlichen Inhalt des halben Ellipsoids findet man auf dieselbe Weise wie bei dem vorigen Falle, indem man sich dasselbe durch rechtwinkelig zur Achse AZ hindurchgelegte Ebenen in Scheiben von der Dicke dz und dem Rauminhalte:

$$dJ = uv\pi dz$$

zerlegt denkt, worauf man durch Summation dieser Grössen, oder durch Integration zwischen den Grenzen 0 und c, mit Benutzung der obigen beiden Ellipsen-Gleichungen den folgenden Werth für J erhält:

$$J = \int_0^c \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - z^2} \cdot \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - z^2} \, . \, \pi dz, \text{ oder:}$$

$$J = \frac{ab\pi}{c^2}\int_0^c (c^2 - z^2) dz = \frac{2}{3} abc\pi.$$

Die Höhe des Schwerpunktes der oberen Ellipsoid-Hälfte über der Ebene AXY findet man aus der Gleichung:

$$Jz_0 = \int_{z=0}^{z=c} dJ \, . \, z,$$

welche nach Substitution des für dJ gefundenen Ausdrncks die Form annimmt:

$$Jz_0 = \frac{ab\pi}{c^2}\int_0^c (c^2 - z^2) \, z dz, \quad \text{oder:} \quad Jz_0 = \frac{abc^2\pi}{4}.$$

Nach Einsetzung des oben für J gefundenen Ausdrucks liefert diese Gleichung für z_0 aufgelöst den Werth:

$$z_0 = \frac{3}{8} c.$$

Der Schwerpunktsabstand ist also unabhängig von den Halbachsen a und b. Wenn man $a = b = c = r$ setzt, so erhält man als Schwerpunktsabstand für die Halbkugel den Werth: $z_0 = \frac{3}{8} r$.

§ 82.

Bewegung eines Systems von zwei materiellen Punkten.

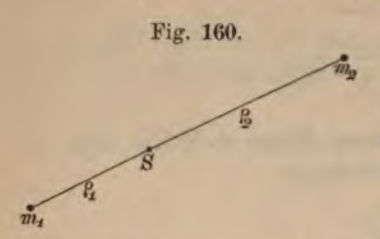
Der Schwerpunkt eines Systems von zwei materiellen Punkten liegt in der geraden Verbindungslinie der beiden Punkte (Fig. **160**). Nach den allgemeinen Schwerpunktsgleichungen 1) des vorigen Paragraphen erhält man für die Abstände des Schwerpunktes S von jedem der beiden materiellen Punkte m_1 und m_2, indem man ihre Massen-

summe $m_1 + m_2 = M$ und ihren Abstand $\rho_1 + \rho_2 = \rho$ setzt, die Werthe:

$$\rho_1 = \frac{m_2}{M}\rho \quad \text{und} \quad \rho_2 = \frac{m_1}{M}\rho.$$

Wie man aus diesen Gleichungen die Lage des Schwerpunktes bestimmen kann, sobald die Lage jedes der beiden materiellen Punkte gegeben ist, so kann man auch umgekehrt, wenn die Lage des Schwerpunktes, sowie die Richtung und Länge der Verbindungslinie der beiden materiellen Punkte gegeben ist, die obigen Gleichungen dazu benutzen, um die Lage jedes der beiden materiellen Punkte in dieser Verbindungslinie festzustellen.

Fig. 160.



In § 69 wurde gezeigt, wie man bei zwei materiellen Punkten welche mit einer anziehenden oder abstossenden Kraft auf einander gegenseitig wirken, die relative Bewegung des einen Punktes in Bezug auf den anderen Punkt bestimmen kann. Es wurde dort gezeigt, wie man für jeden Werth der Zeit t den Radius vector der relativen Bahnlinie seiner Richtung und Grösse nach bestimmen kann. Wäre ausserdem noch die jedesmalige Lage des Schwerpunktes gegeben, so würden damit auch die absoluten Orte der beiden materiellen Punkte für jeden Werth der Zeit bekannt sein. Zur vollständigen Lösung der Aufgabe: betreffend die Bestimmung der absoluten Bewegungen der beiden materiellen Punkte, ist es also nur noch erforderlich, das Gesetz des Schwerpunktes hinzuzuziehen.

Aus den gegebenen Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten der beiden materiellen Punkte können die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes berechnet werden mittelst der Gleichungen:

$$Mx_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2, \qquad M\frac{dx_0}{dt} = m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt},$$

$$My_0 = m_1 y_1 + m_2 y_2, \qquad M\frac{dy_0}{dt} = m_1 \frac{dy_1}{dt} + m_1 \frac{dy_2}{dt},$$

$$Mz_0 = m_1 z_1 + m_2 z_2, \qquad M\frac{dz_0}{dt} = m_1 \frac{dz_1}{dt} + m_2 \frac{dz_2}{dt}.$$

Wenn keine äussere Kräfte vorhanden sind, d. h. wenn die Bewegung des aus den beiden materiellen Punkten bestehenden Systems ausschliesslich unter Einwirkung der anziehenden oder abstossenden Kräfte erfolgt, mit welchen dieselben auf einander gegenseitig wirken, so ist die Bewegung ihres gemeinschaftlicheu Schwerpunktes eine geradlinige und gleichförmige. Es kann daher die vom Schwerpunkte in jeder von den drei Achsenrichtungen zurückgelegte Wegeslänge für jeden Werth der Zeit t berechnet werden nach der für die geradlinige gleichförmige Bewegung geltenden Formel:

Wegeslänge = Geschwindigkeit mal Zeit.

Indem man dann durch den auf solche Weise bestimmten Ort des Schwerpunktes eine gerade Linie legt, deren Richtung übereinstimmt mit der aus der Theorie der relativen Bewegung bekannten Richtung des Radiusvectors der relativen Bahnlinie, und die gleichfalls aus jener Theorie bekannte Grösse ρ dieses Radiusvectors in die beiden Theile ρ_1 und ρ_2 zerlegt, deren Grössen aus den im Anfange dieses Paragraphen aufgestellten Gleichungen zu bestimmen sind, findet man die absoluten Orte der beiden materiellen Punkte.

§ 83.

Princip der lebendigen Kraft.

Zu den möglichen Verschiebungen eines Systems von materiellen Punkten gehört jedenfalls auch die in einem bestimmten Zeitelemente erfolgende wirkliche Bewegung desselben. Die in § 73 gefundene, aus der Verbindung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten mit dem d'Alembert'schen Principe hervorgegangene allgemeine Gleichung, in welcher die unendlich kleinen Grössen δx, δy, δz irgend welche fingirte mögliche, d. h. mit den vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen vereinbare, Verschiebungen bedeuteten, kann daher in jedem Augenblicke auch angewendet werden auf die in dem nächstfolgenden Zeitelemente dt von dem System wirklich ausgeführte Bewegung. Wenn man diese in der Zeit dt von den materiellen Punkten wirklich ausgeführten Bewegungen zum Unterschiede von jenen fingirten Verschiebungen mit dx, dy, dz bezeichnet, so nimmt die Gleichung des § 73 folgende Form an:

$$0=\Sigma\left\{\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)dx+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)dy+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)dz\right\},\text{oder:}$$

$$1)\quad \Sigma(Xdx+Ydy+Zdz)=\Sigma\left\{m\left(\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2}\right)\right\},$$

und wenn man auf beiden Seiten die Integration nach der Zeit t ausführt, so erhält man die Gleichung:

$$2)\quad \int\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz)=\int\Sigma\left\{m\left(\frac{dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z}{dt^2}\right)\right\}.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich nur durch das Summationszeichen von der in § 45 gefundenen Gleichung. Der auf der linken Seite unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck bedeutet die Summe der von den wirkenden Kräften an den einzelnen materiellen Punkten während der Zeit dt verrichteten mechanischen Arbeiten, und der auf der rechten Seite unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck bedeutet die Summe der während der Zeit dt hervorgebrachten Zunahmen an lebendiger Kraft. Nach der in § 45 angewendeten Bezeichnungsweise kann man der obigen Gleichung auch die folgende einfachere Form geben:

$$3)\quad \int d\Sigma(\mathfrak{A})=\int d\Sigma\left(\frac{m\,v^2}{2}\right),\quad\text{oder:}$$

$$4)\quad \Sigma(\mathfrak{A})=\Sigma\left(\frac{m\,v^2}{2}\right)-\Sigma\left(\frac{m\,v_0^2}{2}\right),$$

und erkennt daraus, dass der in § 45 für den einfachen materiellen Punkt bewiesene Satz, nach welchem die Zunahme der lebendigen Kraft stets gleich der von den wirkenden Kräften verrichteten mechanischen Arbeit ist, auch für ein beliebiges System von materiellen Punkten gültig ist. In gleicher Weise wird es sich zeigen, dass die im Anschluss an den in § 45 bewiesenen Satz in § 46 für den einfachen materiellen Punkt gegebene Definition des Begriffs der „Kräfte-Function" ebenfalls übertragen werden kann auf ein System von mehreren materiellen Punkten.

Wenn die Gesetze, nach welchen die auf das System wirkenden Kräfte mit der Lage desselben sich ändern, so beschaffen sind, dass die Seitenkräfte X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2 ... resp. die nach den Coordinaten x_1, y_1, z_1, x_2, y_2 ... genommenen partiellen Differenzial-Quotienten einer Kräfte-Function U bilden, d. h. wenn eine Function:

$$5)\quad U=f(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2\ \ldots)$$

existirt, welche so beschaffen ist, dass dieselbe den folgenden Bedingungsgleichungen Genüge leistet:

$$6)\quad \begin{cases} \frac{dU}{dx_1} = X_1, \quad \frac{dU}{dx_2} = X_2 \ldots, \\ \frac{dU}{dy_1} = Y_1, \quad \frac{dU}{dy_2} = Y_2 \ldots, \\ \frac{dU}{dz_1} = Z_1, \quad \frac{dU}{dz_2} = Z_2 \ldots, \end{cases}$$

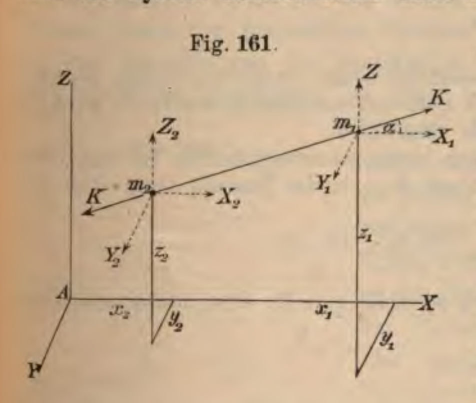
so ist der in Gleichung 2) auf der linken Seite unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck als das totale Differenzial dieser Grösse U zu betrachten, und man kann jener Gleichung auch die folgende Form geben:

$$7)\quad \int dU = \int d\Sigma\left(\frac{mv^2}{2}\right), \text{ oder: } U - U_0 = \Sigma\left(\frac{mv^2}{2}\right) - \Sigma\left(\frac{mv_0^2}{2}\right).$$

In dieser letzteren Gleichung bedeutet U_0 den Werth, welcher für die veränderliche Grösse U aus Gleichung 5) sich ergiebt, wenn darin für die Coordinaten die der Anfangslage des Systems entsprechenden Werthe substituirt werden.

Es lässt sich nun nachweisen, dass eine solche Kräfte-Function — welche auch das „Potential“ genannt wird — immer existirt, wenn das System ausschliesslich unter Einwirkung von anziehenden oder abstossenden Kräften sich bewegt, welche zugleich Functionen der Abstände sind; und es soll zunächst für ein aus zwei materiellen Punkten bestehendes System dieser Beweis geführt werden.

Fig. 161.



Wenn K die (positive oder negative) Kraft ist, mit welcher die beiden materiellen Punkte auf einander gegenseitig wirken (Fig. 161), so hat nach dem in § 73 Gleichung 4) enthaltenen Satze die von den Seitenkräften der beiden Kräfte K während der Zeit dt verrichtete Arbeitssumme die Grösse:

$$\left.\begin{aligned} X_1\,dx_1 + Y_1\,dy_1 + Z_1\,dz_1 \\ + X_2\,dx_2 + Y_2\,dy_2 + Z_2\,dz_2 \end{aligned}\right\} = K\,dl.$$

Der Voraussetzung nach sollte die Kraft K eine Function des Abstandes l sein. Wenn diese Function mit $f'(l)$ bezeichnet wird, und $f(l)$ diejenige Function ist, von welcher $f'(l)$ die abgeleitete Function bildet, so ist $U = f(l)$ die gesuchte Kräfte-Function. Denn nach Fig. 161 ist:

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}, \text{ folglich:}$$

$$\frac{dl}{dx_1} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}, \text{ oder:}$$

$$\frac{dl}{dx_1} = \frac{x_1 - x_2}{l} = \cos\alpha.$$

Für den partiellen Differenzial-Quotienten von U nach x_1 ergiebt sich also der Werth:

$$\frac{dU}{dx_1} = \frac{dU}{dl} \cdot \frac{dl}{dx_1} = f'(l)\left(\frac{x_1 - x_2}{l}\right), \text{ oder: } \frac{dU}{dx_1} = K\cos\alpha = X_1.$$

Auf gleiche Weise findet man, dass die nach den anderen 5 Coordinaten genommenen Differenzial-Quotienten von U die anderen 5 Seitenkräfte darstellen.

So z. B. würde für ein System von zwei materiellen Punkten, welche nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze auf einander wirken, die Kräfte-Function oder das Potential dargestellt durch den Ausdruck:

$$8)\quad U = k\frac{m_1 \cdot m_2}{\rho},$$

in welchem mit m_1, m_2 die Massen der beiden materiellen Punkte bezeichnet sind, mit ρ ihr Abstand und mit k die Anziehungskraft, welche die Masse Eins auf die Masse Eins im Abstande Eins ausübt.

Die Arbeit, welche von den beiden Anziehungskräften bei dem Uebergange des Systems aus dem Abstande ρ_0 in den Abstand ρ verrichtet wird, hat also die Grösse:

$$\mathfrak{A} = \frac{k m_1 m_2}{\rho} - \frac{k m_1 m_2}{\rho_0}.$$

Wenn man hierin $\rho_0 = \infty$ setzt, so erhält man für diese mechanische Arbeit den Werth:

$$9)\quad \mathfrak{A} = \frac{k m_1 m_2}{\rho} = U.$$

Die Grösse U kann daher auch definirt werden als diejenige mechanische Arbeit, welche die Anziehungskräfte verrichten würden, wenn die beiden materiellen Punkte aus unendlich grosser Entfernung in die dem Abstande ρ entsprechende Lage übergingen, und da:

$$10)\quad K = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{\rho^2}$$

die Kraft ist, mit welcher die beiden materiellen Punkte einander anziehen,

so kann man dem obigen Ausdrucke für diese Arbeit auch die folgende Form geben:

11) $\mathfrak{A} = K\rho.$

Für ein System, welches aus zwei solchen Paaren von materiellen Punkten wie das in Fig. 161 dargestellte besteht, ist die gesuchte Kräfte-Function:

$$U = U' + U''$$

zu setzen, wenn mit U' die Kräfte-Function für die beiden Kräfte des ersten, mit U'' die Kräfte-Function für die beiden Kräfte des zweiten Paares bezeichnet wird; denn es ist:

$$\frac{dU''}{dx_1} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dU}{dx_1} = \frac{dU'}{dx_1} = X_1,$$

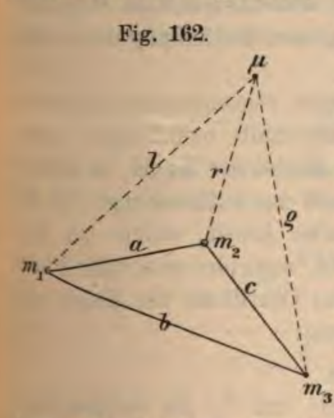
zu welcher letzteren Gleichung man auf dieselbe Weise wie bei dem vorigen Falle gelangt.

Für ein System von beliebig vielen materiellen Punkten, welche auf dieselbe Art wie bei den vorigen Fällen paarweise mit einander durch Wechselwirkung verbunden sind, würde die Kräfte-Function oder das Potential darzustellen sein durch den Ausdruck:

$$U = U' + U'' + U''' + \ldots,$$

in welchem jedes der einzelnen Glieder auf der rechten Seite die Kräfte-Function bildet für die beiden Kräfte, welche bei einem solchen Paare von materiellen Punkten thätig sind. Der Fall, in welchem einzelne von den materiellen Punkten zugleich mehreren solchen Paaren angehören, ist dabei nicht ausgeschlossen. Ebensowenig der Fall, in welchem für einige von den materiellen Punkten die Bedingung der Unbeweglichkeit vorgeschrieben ist. Es existirt daher eine Kräfte-Function in allen solchen Fällen, wo die Kräfte, unter deren Einwirkung das System sich bewegt, anziehende oder abstossende Kräfte sind, welche Functionen der Abstände sind und entweder von festen Punkten ausgehen oder von den materiellen Punkten des Systems auf einander gegenseitig ausgeübt werden. In allen solchen Fällen kann die Zunahme der lebendigen Kraft nach Gleichung 7) berechnet werden.

Fig. 162.



Das Potential eines Systems von drei (als materielle Punkt gedachten) Massen m_1, m_2, m_3, welche nach den Newton'sche Gravitationsgesetze aufeinander wirken, hat nach Fig. 162 die Grösse

$$12)\quad U = k\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{a} + k\cdot\frac{m_1\cdot m_3}{b} + k\cdot\frac{m_2\cdot m_3}{c},$$

und das Hinzutreten eines vierten materiellen Punktes von de Masse μ bedingt eine Zunahme des Potentials um die Grösse:

$$13)\quad \Delta U = k\cdot\frac{\mu\cdot m_1}{l} + k\cdot\frac{\mu\cdot m_2}{r} + k\cdot\frac{\mu\cdot m_3}{\rho}.$$

§ 84.

Potential einer homogenen Kugel.

Das Potential eines Systems von beliebig vielen materiell Punkten, welche nach dem Newton'schen Gesetze einander gege seitig anziehen, kann nach der im vorigen Paragraphen gegeben Erklärung definirt werden als die Summe der mechanischen Arbeite welche diese Anziehungskräfte verrichten würden, wenn die materiell Punkte aus unendlich grossen Abständen in die gegebene La übergingen. Wenn also mit U das Potential eines Systems von materiellen Punkten bezeichnet wird, so ist der Zuwachs ΔU, we chen die Grösse U durch Hinzufügung eines $(n+1)$ten materiell Punktes erhalten würde, gleich der Summe der mechanischen A beiten, welche die von den einzelnen materiellen Punkten des ganz Systems auf den letzteren ausgeübten Anziehungskräfte verricht würden, wenn derselbe aus unendlich grosser Entfernung in die g gebene Lage überginge.

Nach § 45 wirkt eine aus homogenen concentrischen Schicht zusammengesetzte Kugel auf einen ausserhalb befindlichen mat riellen Punkt gerade so, wie wenn die Masse der Kugel im Mitt punkte derselben concentrirt wäre, und nach Gleichung 11) d vorigen Paragraphen ist die mechanische Arbeit, welche die A ziehungskraft der Kugel verrichten würde, wenn der materielle Pun aus unendlich grosser Entfernung bis zur Oberfläche der Kugel si bewegte, zu berechnen aus der Gleichung:

$$\mathfrak{A} = m\mathfrak{v}g\rho,$$

in welcher ρ den Halbmesser der Kugel, und $\mathfrak{v}g$ die Fallbeschle nigung an der Oberfläche derselben bedeutet. Das Potential ein Kugel von der Masse M mit dem Halbmesser ρ würde also dur

Hinzufügung eines an der Oberfläche derselben befindlichen materiellen Punktes von der Masse m, nach Gleichung 13) des vorigen Paragraphen, den Zuwachs erhalten:

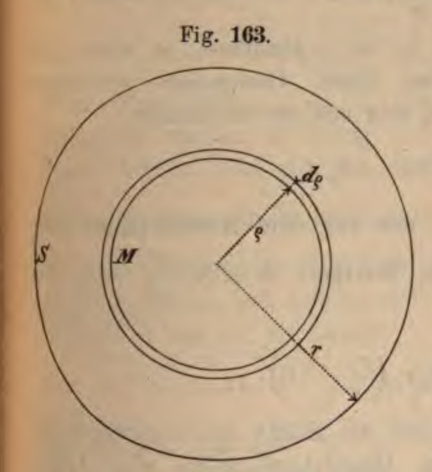
$$\Delta U = m \mathfrak{v} g \varrho.$$

Indem man hierin dM statt m und dU statt ΔU setzt, erhält man die Differenzialgleichung:

$$dU = dM \,.\, \mathfrak{v} g \varrho.$$

Die neu hinzukommende Masse dM kann man sich auch als Masse einer Oberflächenschicht von der unendlich kleinen Höhe $d\varrho$ denken (Fig. 163). Wenn also mit γ die Dichtigkeit im Abstande ϱ vom Mittelpunkte bezeichnet wird in einer aus homogenen concentrischen Schichten zusammengesetzten Kugel vom Halbmesser r, so ist:

Fig. 163.



$$dM = 4\pi\varrho^2 d\varrho \,.\, \gamma$$

zu setzen. Das Potential der ganzen Kugel vom Halbmesser r ist also zu berechnen aus der Gleichung:

$$U = 4\pi g \int_0^r \gamma \mathfrak{v} \varrho^3 d\varrho.$$

Wenn mit Ng die Fallbeschleunigung an der Oberfläche der ganzen Kugel bezeichnet wird, so ist nach § 45 für eine homogene Kugel:

$$\mathfrak{v} = N \frac{\varrho}{r}$$

zu setzen. Unter Voraussetzung constanter Dichtigkeit erhält man also für das Potential der Kugel die Gleichung:

$$U = \frac{4\pi\gamma Ng}{r} \int_0^r \varrho^4 d\varrho, \text{ oder:}$$

$$U = \frac{4}{5} \pi\gamma N g r^4.$$

Für die Masse der ganzen Kugel ergiebt sich aus obiger Voraussetzung der Werth:

$$S = \frac{4}{3}\pi\gamma r^3,$$

und das Gewicht, welches diese Masse an der Erdoberfläche besitzen würde, hat die Grösse:

$$P = Sg = \frac{4}{3}\pi\gamma r^3 g.$$

Hiernach kann man dem oben für das Potential gefundenen Ausdrucke auch die folgende einfachere Form geben:

$$U = \frac{3}{5} PNr.$$

Wenn der Halbmesser von r_0 bis r abnähme, so würde die von den Gravitationskräften bei dieser Contraction verrichtete mechanische Arbeit zu berechnen sein aus der Gleichung:

$$\mathfrak{A} = \frac{3}{5} P(Nr - N_0 r_0),$$

welcher man nach Substitution des aus dem Newton'schen Gravitationsgesetze zu entnehmenden Werthes: $N = N_0 \frac{r_0^2}{r^2}$ auch die folgende Form geben kann:

$$\mathfrak{A} = \frac{3}{5} PN_0 r_0 \left(\frac{r_0}{r} - 1\right).$$

Bei einer Contraction bis auf die Hälfte des ursprünglichen Halbmessers wird also von den Gravitationskräften eine Arbeit verrichtet, welche dieselbe Grösse hat wie der ursprüngliche Potentialwerth.

§ 85.

Allgemeiner Ausdruck für die lebendige Kraft eines Systems von materiellen Punkten.

Man kann die Geschwindigkeit jedes einzelnen zu dem Systeme gehörigen materiellen Punktes betrachten als zusammengesetzt aus zwei Seitengeschwindigkeiten, von denen die eine ihrer Grösse und Richtung nach gleich der Geschwindigkeit ist, mit welcher der Schwerpunkt des Systems sich bewegt, und die andere mit der relativen Geschwindigkeit des materiellen Punktes in Bezug auf den Schwerpunkt übereinstimmt. Nach § 22 und § 69 ist die relative Geschwindigkeit eines Punktes in Bezug auf einen zweiten Punkt aufzufassen als relative Geschwindigkeit in Bezug auf einen

fortschreitenden Raum, dessen Bewegung mit der des zweiten Punktes übereinstimmt. Wenn man sich also durch den Schwerpunkt des Systems drei rechtwinkelig zu einander stehende Coordinaten-Achsen von unveränderlichen Richtungen gelegt denkt, und mit ξ, η, ζ die Coordinaten eines der materiellen Punkte in Bezug auf dieses mit dem Schwerpunkte fortschreitende Coordinaten-System bezeichnet, so sind $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ die drei Seitengeschwindigkeiten seiner relativen Geschwindigkeit c, und die letztere ist zu bestimmen aus der Gleichung:

$$c^2 = \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2.$$

Wenn ferner mit x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Schwerpunktes bezeichnet werden in Bezug auf ein festes Coordinaten-System, dessen Achsen resp. mit den drei Achsen jenes beweglichen Coordinaten-Systems gleiche Richtungen haben, so sind $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$ die drei Seitengeschwindigkeiten des Schwerpunktes, und die Geschwindigkeit u, mit welcher der Schwerpunkt sich bewegt, ist zu bestimmen aus der Gleichung:

$$u^2 = \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt}\right)^2.$$

Man erhält hiernach für die drei Seitengeschwindigkeiten des materiellen Punktes die in Fig. **164** angegebenen Werthe und für die lebendige Kraft des ganzen Systems den Ausdruck:

$$\Sigma\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \Sigma\left\{\left(\frac{m}{2}\right)\left[\left(\frac{dx_0}{dt} + \frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]\right\},$$

oder:

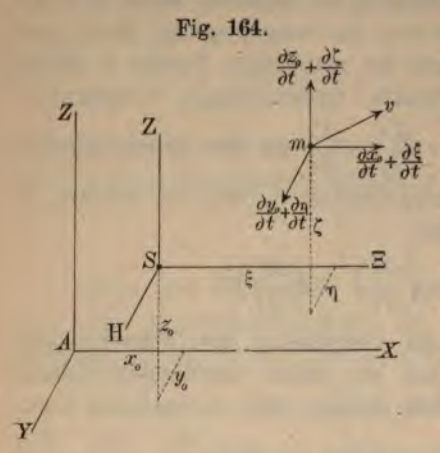
$$\Sigma\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{u^2}{2}\Sigma(m) + \Sigma\left(\frac{mc^2}{2}\right) + \frac{dx_0}{dt}\,\Sigma\left(m\frac{d\xi}{dt}\right) + \frac{dy_0}{dt}\,\Sigma\left(m\frac{d\eta}{dt}\right) + \frac{dz_0}{dt}\,\Sigma\left(m\frac{d\zeta}{dt}\right).$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkte ist jedes der drei letzten Glieder gleich Null. Man kann daher, indem man die ganze Massen-Summe des Systems mit M bezeichnet, der obigen Gleichung auch die folgende einfachere Form geben:

$$\Sigma\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{Mu^2}{2} + \Sigma\left(\frac{mc^2}{2}\right).$$

Diese Gleichung zeigt, dass die lebendige Kraft eines Systems von materiellen Punkten immer aus folgenden zwei Theilen sich zusammensetzt: der eine Theil ist die lebendige Kraft, welche das System besitzen würde, wenn die ganze Massen-Summe desselben im Schwerpunkte concentrirt wäre; der andere Theil ist diejenige lebendige Kraft, welche das System besitzen würde, wenn die relativen Geschwindigkeiten der materiellen Punkte in Bezug auf den Schwerpunkt die wirklichen Geschwindigkeiten wären, also diejenige lebendige Kraft, welche das System besitzen würde, wenn der Schwerpunkt desselben im Ruhezustande sich befände. Oder kürzer ausgedrückt:

Fig. 164.



Die totale lebendige Kraft des Systems setzt sich zusammen aus der lebendigen Kraft, welche der Schwerpunktsbewegung entspricht, und der lebendigen Kraft, welche der relativen Bewegung in Bezug auf den Schwerpunkt entspricht.

§ 86.

Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Die sämmtlichen Kräfte, welche auf ein System von materiellen Punkten wirken, können in zwei Gruppen zerlegt werden: die Gruppe der inneren Kräfte und die Gruppe der äusseren Kräfte. Zu der ersteren gehören alle diejenigen Kräfte, welche die materiellen Punkte des Systems auf einander gegenseitig ausüben, zu der letzteren alle diejenigen Kräfte, deren Ausgangspunkte ausserhalb des Systems liegen (oder wenigstens dem Systeme nicht angehören). Wenn mit $\mathfrak{A}_i$ die von den inneren Kräften, mit $\mathfrak{A}_a$ die von den äusseren Kräften verrichtete Arbeit-Summe bezeichnet wird, und zugleich für die lebendige Kraft des Systems der im vorigen Paragraphen gefundene allgemeine Ausdruck eingeführt wird, so nimmt die Gleichung der lebendigen Kraft die folgende Form an:

$$\left[\frac{Mu^2}{2}+\Sigma\left(\frac{mc^2}{2}\right)\right]-\left[\frac{Mu_0^2}{2}+\Sigma\left(\frac{mc_0^2}{2}\right)\right]=\mathfrak{A}_i+\mathfrak{A}_e.$$

Aus dem Gesetze des Schwerpunktes (§ 79) folgt, dass nur durch äussere Kräfte die Geschwindigkeit des Schwerpunktes verändert werden kann. Wenn also $\mathfrak{A}_e = 0$ ist, so wird $u = u_0$. Dieser Fall tritt unter anderen dann ein, wenn überhaupt nur innere Kräfte vorhanden sind. In diesem Falle ist also:

$$\Sigma\left(\frac{mc^2}{2}\right)-\Sigma\left(\frac{mc_0^2}{2}\right)=\mathfrak{A}_i.$$

Wenn zugleich die inneren Kräfte von solcher Beschaffenheit sind, dass für dieselben eine Kräfte-Function existirt, so kann man nach § 83 der obigen Gleichung auch die folgende Form geben:

$$\Sigma\left(\frac{mc^2}{2}\right)-\Sigma\left(\frac{mc_0^2}{2}\right)=U-U_0, \text{ oder:}$$

$$\Sigma\left(\frac{mc^2}{2}\right)-U=\Sigma\left(\frac{mc_0^2}{2}\right)-U_0.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die lebendige Kraft der relativen Bewegung vermindert um den der Lage des Systems entsprechenden Werth der Kräfte-Function eine unveränderliche Grösse bildet. Für den Fall, dass die constante Geschwindigkeit des Schwerpunktes gleich Null ist, gilt der gleiche Satz für die wirkliche lebendige Kraft des Systems.

Wenn das System aus sämmtlichen im Universum vorhandenen materiellen Punkten besteht, so sind sämmtliche vorhandene Kräfte als innere Kräfte zu betrachten, und wenn man zugleich die Annahme macht, dass es keine andere Kräfte giebt als anziehende oder abstossende Kräfte, welche Functionen des Ortes sind, so würde aus der obigen Gleichung folgen: dass die gesammte im Universum vorhandene lebendige Kraft vermindert um den der Lage der materiellen Punkte entsprechenden Werth der Kräfte-Function eine unveränderliche Grösse hat. Wenn man $U = U_0$ setzt, so wird:

$$\Sigma\left(\frac{mc^2}{2}\right)=\Sigma\left(\frac{mc_0^2}{2}\right).$$

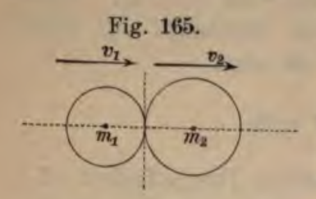
Es würde also die gesammte im Universum vorhandene lebendige Kraft wieder den Werth annehmen, welchen dieselbe in irgend einem als Anfangspunkt gewählten früheren Zeitpunkte hatte, sobald die sämmtlichen vorhandenen materiellen Punkte einmal wieder in ihre anfängliche Lage zurück gelangten.

§ 87.

Stoss elastischer Körper.

Bei dem geraden centralen Stosse eines Körpers gegen einen anderen Körper entsteht an der Berührungsstelle zwischen den beiden Körpern ein Druck, welcher in dem Maasse zunimmt, wie die Zusammendrückung fortschreitet, oder wie die Schwerpunkte der beiden Körper einander näher rücken (Fig. 165). Annäherungsweise darf man annehmen, dass dabei die Schwerpunkte der beiden Körper sich bewegen wie zwei einfache materielle Punkte, welche einander gegenseitig abstossen mit einer Kraft, deren Grösse als eine Function des Abstandes der beiden Punkte zu betrachten ist. Diese abstossenden Kräfte sind in Bezug auf das aus den beiden Körpern zusammen genommen bestehende System von materiellen Punkten als innere Kräfte anzusehen; es kann daher durch sie die Geschwindigkeit ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes nicht verändert werden.

Fig. 165.



Wenn mit m_1, m_2 die Massen der beiden Körper, und mit v_1, v_2 die Geschwindigkeiten bezeichnet werden, welche dieselben vor dem Stosse besassen, so ist die unverändert bleibende Geschwindigkeit u ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes zu bestimmen aus der Gleichung:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u, \text{ oder: } u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Wären die beiden Körper so weich und unelastisch, wie es erforderlich ist, um die Annahme zu rechtfertigen, dass die an der Berührungsstelle eingetretene Zusammendrückung eine bleibende ist, dass also nach der Zusammendrückung gar keine Wiederausdehnung stattfindet, so würde jene Geschwindigkeit u zugleich die gemeinschaftliche Geschwindigkeit sein, mit welcher die beiden Massen nach dem Stosse ihre Bewegung weiter fortsetzen. In diesem Falle entsteht ein Verlust an lebendiger Kraft von der Grösse:

$$\mathfrak{V} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - (m_1 + m_2) \frac{u^2}{2} \quad \text{oder:}$$

$$\mathfrak{V} = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) \frac{(v_1 - v_2)^2}{2}.$$

Wenn dagegen die beiden Körper während ihrer Berührungsdauer wie vollkommen elastische Körper sich verhalten, d. h. wenn dieselben nach dem Augenblicke der grössten Zusammendrückung in ihre ursprünglichen Formen vollständig wieder zurückkehren, so darf man annehmen, dass die Grösse des Druckes die nämlichen Werthe, welche dieselbe während der zunehmenden Zusammendrückung nach und nach angenommen hatte, bei der Wiederausdehnung nachher in umgekehrter Reihenfolge wieder durchläuft, dass also die Schwerpunkte sich bewegen wie zwei materielle Punkte, für deren gegenseitige Abstossungskraft eine Kräfte-Function existirt, und auf deren Bewegung das im vorigen Paragraphen erklärte Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft Anwendung findet. Es muss daher in dem Augenblicke, wo der Abstand der beiden Punkte wieder dieselbe Grösse erreicht, welche dem Momente der ersten Berührung entsprach, auch die Summe der lebendigen Kräfte wieder denselben Werth annehmen. Man erhält also für die Geschwindigkeiten c_1, c_2, mit welchen die beiden Massen nach dem Stosse ihre Bewegungen fortsetzen, die Gleichungen:

$$m_1 c_1 + m_2 c_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2,$$
$$\frac{m_1 c_1^2}{2} + \frac{m_2 c_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Die erste drückt das Gesetz des Schwerpunktes, die letztere das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft aus. Durch Auflösung dieser Gleichungen erhält man für die Geschwindigkeiten, welche die beiden Körper nach dem Stosse besitzen, die Werthe:

$$c_1 = v_1 - \frac{2(v_1 - v_2)}{1 + \frac{m_1}{m_2}}, \quad c_2 = v_2 + \frac{2(v_1 - v_2)}{1 + \frac{m_2}{m_1}}.$$

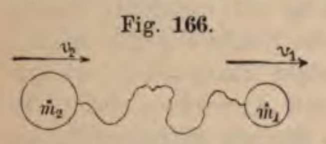
Wenn $m_1 = m_2$ ist, so wird $c_1 = v_2$ und $c_2 = v_1$. Hieraus folgt, dass zwei gleich grosse elastische Massen bei geradem centralen Stosse ihre Geschwindigkeiten gegen einander austauschen.

Für $\frac{m_2}{m_1} = 0$ wird $c_1 = v_1$ und $c_2 = 2v_1 - v_2$, und wenn zugleich $v_2 = 0$ war, so wird: $c_2 = 2v_1$. Eine vor dem Stosse ruhende unendlich kleine Masse nimmt also beim Stosse die doppelte Geschwindigkeit der stossenden Masse an.

Setzt man $\frac{m_1}{m_2} = 0$, so wird $c_1 = v_1 - 2(v_1 - v_2)$ und $c_2 = v_2$; wenn zugleich $v_2 = 0$ war, so wird $c_1 = -v_1$ und $c_2 = 0$. Eine elastische Kugel, welche mit der Geschwindigkeit v_1 rechtwinkelig gegen eine unbewegliche Wandfläche stösst, springt mit gleich grosser Geschwindigkeit in entgegengesetzter Richtung zurück.

Die oben gefundenen Gleichungen dürfen auch in dem Falle noch als gültig betrachtet werden, wenn die Stosskraft, mit welcher die beiden Körper auf einander gegenseitig einwirken, nicht durch directe Berührung, sondern durch Vermittelung eines gewichtlosen Fadens von dem einen auf den anderen übertragen wird. Wenn die Geschwindigkeit v_1 der vorausgehenden Masse m_1 grösser ist als die Geschwindigkeit v_2 der nachfolgenden Masse m_2, so wird der die beiden Körper verbindende, anfangs im schlaffen Zustande befindliche Faden nach und nach geradlinig ausgestreckt, gespannt und ausgereckt werden (Fig. 166). Falls dabei der Faden als ein vollkommen elastischer Körper sich verhält — wie z. B. annäherungsweise bei einem Kautschukfaden vorausgesetzt werden dürfte — so wird derselbe nach dem Ausrecken wieder auf seine ursprüngliche Länge sich zusammenziehen, und die Geschwindigkeiten, mit welchen die beiden Massen alsdann ihre Bewegungen fortsetzen, sind nach den oben für c_1 und c_2 gefundenen Gleichungen zu berechnen. Wenn dagegen der Faden als ein vollkommen unelastischer Körper nach dem Ausrecken in seinem verlängerten Zustande bliebe — wie z. B. annäherungsweise der Fall sein würde, wenn statt des Kautschukfadens ein Bleidraht die beiden Körper verbände — so würden beide mit der Geschwindigkeit u, welche ihr gemeinschaftlicher Schwerpunkt vorher besass, ihre Bewegungen fortsetzen.

Fig. 166.



§ 88.

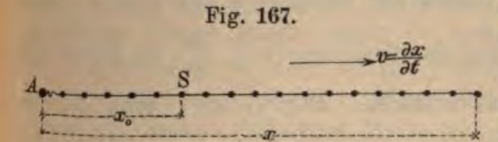
Freie Bewegung einer Kette von materiellen Punkten.

Denkt man sich eine grössere Anzahl von kleinen Kugeln zu einer Reihe vereinigt, in welcher je zwei benachbarte Kugeln auf die in Fig. 166 dargestellte Art durch einen gewichtlosen unausdehnbaren Faden mit einander verbunden sind, so gelangt man annäherungsweise zu der Vorstellung eines linear angeordneten Systems von materiellen Punkten, für welches die Bedingung vorgeschrieben ist, dass der Abstand zwischen den benachbarten materiellen Punkten eine gewisse durch die Länge des verbindenden Fadentheiles gegebene Grösse nicht überschreiten kann. Wenn die Massen der materiellen Punkte gleich gross sind, und die Fadentheile, durch welche je zwei benachbarte materielle Punkte mit einander verbunden gedacht werden, überall dieselbe Länge haben, so

kann man das System als eine vollkommen biegsame Kette betrachten, deren Masse um so mehr als stetig und gleichförmig über die Länge derselben vertheilt angesehen werden darf, je kürzer die verbindenden Fadentheile und je kleiner die Massen der materiellen Punkte sind.

Da die materiellen Punkte der Kette keinen Raum einnehmen, und einer Verminderung des Abstandes zwischen zwei benachbarten materiellen Punkten durch den verbindenden Fadentheil kein Hinderniss entgegengesetzt wird, so kann die ganze Kette oder auch ein beliebiger Theil derselben zeitweise in einem Punkte concentrirt gedacht werden. Ebenso ist der Fall denkbar, dass ein Theil der Kette geradlinig ausgestreckt ist, während der ganze übrige Theil in einem Punkte concentrirt sich befindet. Auch ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass der geradlinig ausgestreckte Theil bereits eine gewisse Geschwindigkeit v in seiner Längenrichtung besitzt, während der ganze übrige in einem Punkte A concentrirte Theil noch im Ruhezustande sich befindet (Fig. 167). In diesem Falle werden an der Uebergangsstelle die vorher ruhenden materiellen Punkte einer nach dem anderen ruckweise in die Bewegung hineingerissen, und die vorher schlaffen Verbindungsfäden dabei jedesmal geradlinig ausgestreckt. Wenn es zulässig ist, den Faden dabei als vollkommen unelastisch zu betrachten, so darf man annehmen, dass in dem bereits geradlinig ausgestreckten Theile die Abstände zwischen den benachbarten materiellen Punkten unverändert bleiben, also sämmtliche materielle Punkte mit gleich grosser Geschwindigkeit v sich bewegen, während an der Uebergangsstelle die Geschwindigkeiten der materiellen Punkte sprungweise von Null bis v zunehmen.

Fig. 167.



Da die Kräfte, welche von den einzelnen materiellen Punkten durch Vermittelung des Fadens auf die Nachbarpunkte übertragen werden, in Bezug auf das ganze System als innere Kräfte zu betrachten sind, so kann durch sie dem Schwerpunkte des ganzen Systems keine Geschwindigkeitsänderung ertheilt werden. Wenn mit L die Länge der ganzen Kette, mit x die Länge des bereits in Bewegung begriffenen Theiles und mit γ die in jeder Längeneinheit der Kette enthaltene Masse bezeichnet wird, so ist der Ab-

stand x_0 des Schwerpunktes der ganzen Kette von der Uebergangsstelle A zu bestimmen aus der Gleichung:

$$\gamma L x_0 = \gamma x \cdot \frac{x}{2}, \quad \text{oder:} \quad x_0 = \frac{x^2}{2L}.$$

Für die Geschwindigkeit des Schwerpunktes erhält man hiernach den Werth:

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{x}{L}\frac{dx}{dt} = \frac{x}{L} v.$$

Da diese Grösse während der Bewegung unverändert bleibt, so ist

$$\frac{x}{L} v = \frac{a}{L} c, \quad \text{oder:} \quad v = \frac{a}{x} c$$

zu setzen, wenn mit a die anfängliche Länge des in Bewegung begriffenen Theiles und mit c dessen Anfangsgeschwindigkeit bezeichnet wird.

Um die Grössen x und v als Functionen der Zeit t darzustellen, hat man in der letzteren Gleichung $v = \frac{dx}{dt}$ zu setzen und hierauf die Integration auszuführen. Man gelangt dann zu den folgenden Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ac}{x}, \quad x\,dx = ac\,dt, \quad \int_a^x x\,dx = ac \int_0^t dt,$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} = act, \quad x = \sqrt{a^2 + 2act}.$$

Nach Substitution des letzteren Ausdrucks nimmt die oben für v gefundene Gleichung die Form an:

$$v = \frac{ac}{\sqrt{a^2 + 2act}}.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, dass selbst bei unendlich grosser Länge des anfangs im Ruhezustande befindlich gewesenen Theiles der Kette die Bewegung unaufhörlich fortdauern, und die vom Vorderende der Kette zurückgelegte Wegeslänge über alle Grenzen hinaus wachsen würde; denn erst für $t = \infty$ wird $v = 0$, und zugleich wird für diesen Werth von t die Länge des in Bewegung begriffenen Theiles unendlich gross.

Für $x = L$ wird $v = \frac{ac}{L}$, und die lebendige Kraft der Kette erreicht in diesem Zeitpunkte die Grösse:

$$E = \frac{\gamma L v^2}{2} = \frac{\gamma a c^2}{2} \cdot \frac{a}{L}.$$

Im Anfange, als $x = a$ war, hatte die lebendige Kraft der Kette die Grösse:

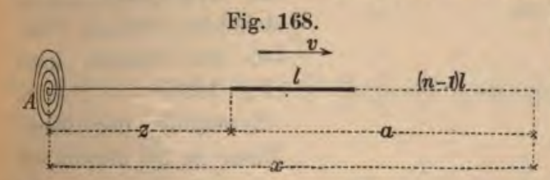
$$E_0 = \frac{\gamma a c^2}{2}.$$

Für den Verlust an lebendiger Kraft ergiebt sich hiernach der Werth:

$$E_0 - E = \frac{\gamma a c^2}{2}\left(1 - \frac{a}{L}\right).$$

Da in dem bereits geradlinig ausgestreckten Theile der Kette keine Längenänderungen und Biegungen vorkommen, so sind die obigen Gleichungen auch dann noch als gültig zu betrachten, wenn man sich an die Stelle des im Anfange schon in Bewegung begriffen und geradlinig ausgestreckt gewesenen Theiles der Kette eine geradlinige Stange gesetzt denkt — vorausgesetzt, dass die Masse pro Längeneinheit für diese Stange dieselbe Grösse hat wie für die Kette, nämlich die Grösse γ. Wenn dagegen die in jeder Längeneinheit der Stange enthaltene Masse gleich $n \cdot \gamma$ ist, und mit l die Länge der Stange bezeichnet wird, so ist $a = n \cdot l$ die Länge eines Kettenstücks von gleicher Masse, und es geschieht die Bewegung der Kette genau auf dieselbe Weise, wie wenn der anfangs geradlinig ausgestreckte, die Anfangsgeschwindigkeit c besitzende Theil der Kette die Länge $a = nl = l + (n-1)l$ gehabt hätte, in welchem Falle der vordere Endpunkt der Kette von dem Ausgangspunkte A stets um die Grösse $(n-1)l$ weiter entfernt sein würde, als das Vorderende der Stange (Fig. 168). Man darf daher die oben gefundenen Gleichungen auch in diesem Falle noch als gültig betrachten, sobald man den Buchstaben a und x die aus Fig. 168 sich ergebenden Bedeutungen beilegt:

Fig. 168.



$$a = nl \quad \text{und} \quad x = z + nl.$$

Wenn z. B. $n = 10$, die Länge der Stange $l = 2^m$, die Anfangsgeschwindigkeit derselben $c = 100^m$ war, so ist $a = 10 \cdot 2 = 20^m$, und es ergeben sich für die Grössen v, x, z als Functionen der Zeit t die nachfolgend zusammengestellten Werthe:

$t = 0$ (Sec.)	0,3	1	2	3	4	100
$v = 100^m$	50	30,15	21,23	17,9	15,62	3,16
$x = 20^m$	40	66,33	91,6	111,356	128,06	632,77
$z = 0^m$	20	46,33	71,6	91,356	108,06	612,77.

Es würde also die mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 100 Metern pro Sec. geworfene Stange, indem sie die Kette hinter sich herzieht, während der ersten zwei Secunden eine Wegeslänge von 71,6 Metern zurücklegen, und ihre Geschwindigkeit würde während dieser Zeit von 100 bis auf 21,23 Meter pro Secunde abnehmen.

§ 89.

Stoss einer bewegten Masse gegen die ruhende Kette.

Wenn man $\gamma x = M$ und $\gamma a = M_0$ setzt, so kann man der Gleichung 3) des vorigen Paragraphen auch die folgende Form geben:

$$1)\quad Mv = M_0 c,$$

in welcher dieselbe das Gesetz des Unverändertbleibens der „Bewegungsgrösse" ausdrückt. Diese Gleichung würde in Bezug auf die in Fig. 167 dargestellte Kette auch dann noch gültig bleiben, wenn die beiden Kettentheile, nämlich der geradlinig ausgestreckte Theil und der im Punkte A concentrirte Theil, ihre Rollen mit einander austauschten in der Weise, dass nunmehr der erstere als im Ruhezustande befindlich und der letztere als mit der Geschwindigkeit v gegen die ruhende geradlinig ausgestreckte Kette stossend anzusehen ist — wobei man, unter Beibehaltung der Voraussetzung des unelastischen Stosses, an Stelle der als materielle Punkte gedachten kleinen Kugeln auch eine geradlinige Reihe von rechtwinklig zur Bewegungsrichtung stehenden dünnen Platten sich denken kann (Fig. 169). — Die in Bewegung begriffene Masse ist bei diesem wie beim vorigen Falle in beständigem Wachsen begriffen, insofern die vorher ruhenden Massentheilchen, eines nach dem anderen, der in Bewegung begriffenen Masse sich anschliessen, wobei die constante vorhandene Bewegungsgrösse auf eine immer fort wachsende Masse sich vertheilt. Die Gültigkeit der obigen Gleichung ist übrigens ganz unabhängig von dem Gesetze, nach welchem die ruhende Masse längs der Bewegungsbahn vertheilt ist. Immer verhalten sich die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Massen, und die Geschwindigkeit wird z. B. bis auf ein Zehntel der Anfangsgeschwindigkeit ab-

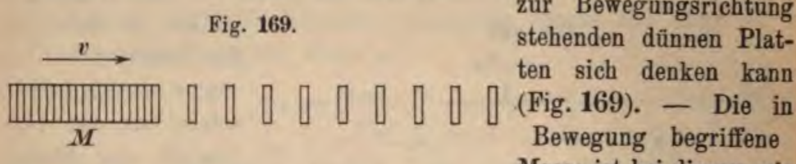


Fig. 169.

genommen haben, wenn die Grösse der in Bewegung begriffenen Masse bis auf das Zehnfache der Anfangsgrösse gewachsen sein wird.

Denkt man sich in Bezug auf Fig. 169 ein anderes Mal die Umstände so beschaffen, dass der Fall des elastischen (statt des unelastischen) als vorliegend anzusehen ist, so findet man nach den Gleichungen des § 87, dass in diesem Falle das gestossene (unendlich klein vorausgesetzte) Massentheilchen die Geschwindigkeit $2v$ annehmen, also der stossenden Masse M vorauseilen wird. Das gestossene Theilchen wird alsdann diese Geschwindigkeit an das folgende abgeben, und diese Uebertragung der Geschwindigkeit $2v$ von einem zum anderen Massentheilchen wird sich bis zum jenseitigen Ende fortsetzen in der Weise, dass das vorderste Massentheilchen der vorher ruhenden Reihe mit der Geschwindigkeit $2v$ sich weiter bewegt, während die sämmtlichen übrigen bis zum nächstfolgenden Stosse im Ruhezustande verharren.

Die stossende Masse M erlitt bei dem Stosse eine Geschwindigkeitsänderung dv, welche man nach dem Gesetze des Unveränderbleibens der Bewegungsgrösse berechnen kann, indem man den Zuwachs derselben gleich Null setzt, also wenn mit $d\mathfrak{M}$ die Masse des ersten gestossenen Theilchens bezeichnet wird, aus der Gleichung:

$$2)\quad M dv + 2v d\mathfrak{M} = 0,$$

deren Integration alsdann zu den folgenden Gleichungen führt:

$$3)\quad \int_c^v \frac{dv}{v} = -\frac{2}{M}\int_0^{\mathfrak{M}} d\mathfrak{M},$$

$$4)\quad \lg\left(\frac{v}{c}\right) = -2\frac{\mathfrak{M}}{M},$$

$$5)\quad v = c e^{-2\frac{\mathfrak{M}}{M}},$$

aus welchen z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Zahlenwerthe sich ergeben:

$\frac{\mathfrak{M}}{M} =$	0	1	2	3	4
$\frac{c}{v} =$	1	7,4	55	403	2981.

Hierin bedeutet $\mathfrak{M}$ die ganze Massensumme der ursprünglich ruhenden Reihe von Massentheilchen, und M die unverändert gebliebene stossende Masse. Nach Beendigung des ganzen Vorgangs wird von der vorher ruhenden Reihe das vorderste Massentheilchen mit der Geschwindigkeit $2c$ sich bewegen, während das zuletzt von der Masse M gestossene Massentheilchen die kleinere Geschwindig-

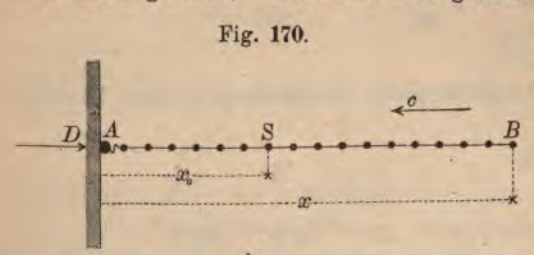
keit $2v$ angenommen hat. In Folge dieses Geschwindigkeitsunterschiedes wird die Länge der gestossenen Reihe während Fortsetzung der Bewegung beständig zunehmen.

§ 90.

Stoss der Kette gegen eine feste Wand.

Das Gesetz des Schwerpunktes lässt sich auch in dem Falle noch auf die Bewegung der Kette anwenden, wenn der geradlinig ausgestreckte Theil derselben eine der in Fig. 167 angenommenen entgegengesetzte Bewegungsrichtung hat — also in der Richtung gegen den im Punkte A concentrirten ruhenden Theil hin sich bewegt. Wenn an dieser Stelle eine rechtwinkelig zur Bewegungsrichtung stehende feste Wand sich befindet, welche die einzelnen materiellen Punkte des in Bewegung begriffenen Kettentheiles, einen nach dem anderen, auffängt und an der Fortsetzung der bisherigen gleichförmigen Bewegung verhindert, so kann man das Gesetz des Schwerpunktes benutzen, um den von dieser festen Wand geleisteten Gegendruck D zu berechnen. Die Grösse dieses Gegendrucks wird wesentlich von der Beschaffenheit der Kette abhängen, von dem Grade der Elasticität, welcher dem Materiale derselben zuzuschreiben ist. Wenn es zulässig ist, anzunehmen, dass die materiellen Punkte bei dem Stosse gegen die feste Wand wie vollkommen unelastische Körper sich verhalten — wie z. B. annäherungsweise angenommen werden dürfte bei sehr kleinen Wachs- oder Bleikügelchen, welche mit sehr grosser Geschwindigkeit gegen eine sehr harte feste Wand stossen — so wird die Grösse des Gegendrucks D zu berechnen sein unter der Voraussetzung: dass jeder einzelne materielle Punkt im Augenblicke des Stosses plötzlich seine ganze Geschwindigkeit verliert und an dem Stosspunkte A im Ruhezustande verbleibt, während die noch nicht zum Stosse gelangten dem geradlinig ausgestreckten Theile angehörenden materiellen Punkte geradlinig und gleichförmig mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit c sich bewegen, welche denselben als Anfangsgeschwindigkeit ertheilt worden war.

Fig. 170.



Für den Abstand des Schwerpunktes der ganzen Kette erhält man nach Fig. 170 auf dieselbe Weise wie im vorigen Paragraphen den Ausdruck:

$$x_0 = \frac{x^2}{2L}$$

und für die Geschwindigkeit des Wachsens der Grösse x_0 ergiebt sich der Werth:

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{x}{L}\frac{dx}{dt}.$$

Da der Endpunkt B mit der constanten Geschwindigkeit c der Wand sich nähert, so ist die Grösse $\frac{dx}{dt}$ als Geschwindigkeit des Wachsens der Grösse x negativ, und zwar ist:

$$\frac{dx}{dt} = -c.$$

Nach Substitution dieses Werthes erhält man für die Geschwindigkeit des Schwerpunktes den gleichfalls negativen Werth:

$$\frac{dx_0}{dt} = -\frac{xc}{L}.$$

Indem man den zweiten Differenzialquotienten von x_0 nach t bildet und wiederum $\frac{dx}{dt} = -c$ setzt, erhält man für die Beschleunigung des Schwerpunktes den Ausdruck:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -\frac{c}{L}\frac{dx}{dt} = +\frac{c^2}{L}.$$

Nach dem Gesetze des Schwerpunktes ist die Beschleunigung desselben so gross wie die Beschleunigung, welche einem einfachen materiellen Punkte von der Masse γL durch die Kraft D ertheilt werden würde. Es ist also zugleich:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = \frac{D}{\gamma L},$$

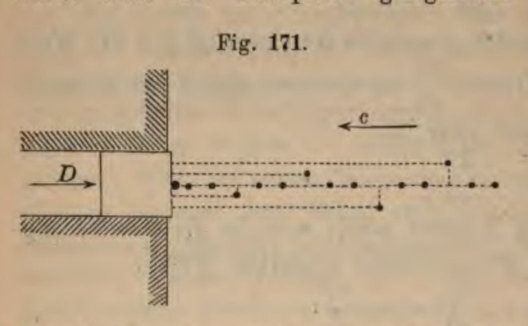
und man erhält durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke die Gleichung:

$$\frac{D}{\gamma L} = \frac{c^2}{L}, \text{ oder: } D = \gamma c^2.$$

Denkt man sich den Theil der Wand, welcher die Stösse empfängt, in der Richtung der Stosskraft verschiebbar, so erkennt man, dass die obige Gleichung auch für diejenige Widerstandskraft gelten würde, welche erforderlich ist, um diesen beweglichen Wandtheil festzuhalten und zu verhindern, dem Stossdrucke nachzugeben. Da der Faden, durch welchen die benachbarten materiellen Punkte mit einander verbunden vorausgesetzt wurden, in dem vor-

liegenden Falle gar nicht zur Wirkung gelangt, so würde die obige Gleichung auch dann noch gültig bleiben, wenn der Faden gar nicht vorhanden wäre. Wenn in solchem Falle von diesen nunmehr isolirt vorausgesetzten mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit c rechtwinkelig gegen die Wand sich bewegenden materiellen Punkten einzelne ausserhalb der Reihe sich bewegten, so würde zwar der Stosspunkt gelegentlich seine Stelle wechseln, übrigens aber in der Grösse des erforderlichen continuirlich wirkenden Gegendrucks D keine Aenderung dadurch bedingt, sobald nur die stetige Aufeinanderfolge der Stösse dieselbe wie vorher bleibt. (Fig. **171**). Es gilt also die obige Gleichung überhaupt dann, wenn die pro Zeiteinheit mit der Geschwindigkeit c zum Stosse gelangende Massensumme die Grösse $m = \gamma c$ hat.

Fig. 171.



Die hier gemachten Voraussetzungen würden annäherungsweise zutreffen, z. B. bei der Bewegung einer Schaar von Wassertropfen, welche entweder in isolirtem Zustande oder zu einem Strahle vereinigt rechtwinkelig gegen eine feste Wand stossen. Wenn die pro Secunde zum Stosse gelangende Massensumme der Wassertropfen ein Gewicht von 1 Kil. hätte, so würde

$$mg = 1 \text{ Kil., folglich: } m = \frac{1}{g} \text{ und}$$

$$D = \gamma c \cdot c = m \cdot c = \frac{c}{g}$$
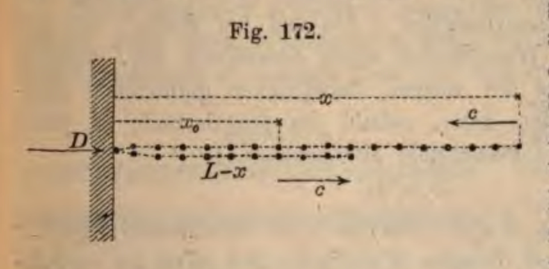
zu setzen sein, und wenn die Geschwindigkeit $c = 9{,}8^{\text{m}}$ ist, so hat der Stossdruck die Grösse: $D = 1$ Kil.

Bei dem stärksten bisher bekannt gewordenen Regenfalle (beobachtet von v. d. Decken in Afrika) bildete die pro Secunde fallende Regenmenge eine Wasserschicht von $0^{\text{m}},000\,068\,6$ Höhe, d. h. es fielen auf 1 Quadratmeter Bodenfläche pro Secunde 0,0686 Kilogramm Wasser. Wenn also die Geschwindigkeit der fallenden Regentropfen gleich $9^{\text{m}},8$ angenommen wird, so ergiebt sich ein Stossdruck von 0,068 6 Kil. pro Quadratmeter.

Wenn die materiellen Punkte bei dem Stosse wie vollkommen elastische Körper sich verhielten, so würde jeder einzelne von denselben mit der Geschwindigkeit c zurückspringen, und es würden die bereits zum Stosse gelangten materiellen Punkte eine geradlinig ausgestreckte Reihe bilden, welche der ankommenden Reihe begegnend mit der Geschwindigkeit c von der Wand sich entfernt.

Um bei diesem Falle keinen Anstoss zu nehmen an dem Gedanken, dass die zurückspringenden und die ankommenden materiellen Punkte einander gegenseitig in ihren Bewegungen stören könnten, braucht man nur die einzelnen materiellen Punkte unendlich wenig aus der geradlinigen Reihe seitwärts verschoben sich denken, in solcher Weise, dass die ankommenden den zurückspringenden freien Durchgang verstatten, oder auch anzunehmen, dass die noch nicht zum Stosse gelangte geradlinige Reihe um einen unendlich kleinen Winkel von der Normalen zur Wandfläche abweicht, in welchem Falle die zurückspringende Reihe nach der entgegengesetzten Seite hin um den gleichen unendlich kleinen Winkel von der Normalen abweichen würde.

Fig. 172.



Für den Abstand x_0 des Schwerpunktes der ganzen Kette von der Wand erhält man bei diesem Falle nach Fig. 172 die Gleichung:

$$\gamma L x_0 = \frac{\gamma x^2}{2} + \gamma \frac{(L-x)^2}{2}, \quad \text{oder:} \quad x_0 = \frac{x^2}{2L} + \frac{(L-x)^2}{2L}.$$

Wenn man diese Gleichung zweimal differenziirt und zugleich berücksichtigt, dass $\frac{dx}{dt} = -c$ ist, so erhält man resp. für Geschwindigkeit und Beschleunigung des Schwerpunktes die Gleichungen:

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{x}{L}\frac{dx}{dt} - \frac{(L-x)}{L}\frac{dx}{dt} = c\left(1 - \frac{2x}{L}\right),$$

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = -\frac{2c}{L}\frac{dx}{dt} = +\frac{2c^2}{L}.$$

Indem man diesen letzteren Ausdruck der nach dem Gesetze des Schwerpunktes sich ergebenden Beschleunigung:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} = \frac{D}{\gamma L}$$

gleichsetzt, erhält man für den von der festen Wand geleisteten Gegendruck D die Gleichung:

$$\frac{D}{\gamma L} = \frac{2c^2}{L}, \quad \text{oder:} \quad D = 2\gamma c^2,$$

welche zeigt, dass derselbe gerade doppelt so gross ist, als der für die unelastische Kette gefundene Stossdruck.

§ 91.

Kinetische Theorie der Gase.

Eine unendlich grosse Anzahl von elastischen unendlich kleinen Kugeln, welche zwischen zwei im Abstande a von einander befindlichen ebenen parallelen festen Wandflächen in der Richtung der Normalen mit der Geschwindigkeit v hin und her fliegen, übt auf jede von den beiden Wandflächen einen Stossdruck aus, welcher nach der am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundenen Gleichung berechnet werden kann, sobald die pro Secunde an jeder Wandfläche zum Stosse gelangende Massensumme:

$$m = \gamma v$$

bekannt ist. Da jede Kugel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stössen gegen eine nnd dieselbe Wandfläche den Weg $2a$ zurücklegt, so ist $\frac{v}{2a}$ die Zahl, welche angiebt, wie oft in einer Secunde jede Kugel diese Wandfläche trifft. Indem man die ganze Massensumme M mit dieser Zahl multiplicirt, erhält man für m den Werth:

$$m = \frac{Mv}{2a}.$$

Durch Gleichsetzung der obigen beiden Ausdrücke findet man für γ den Werth:

$$\gamma = \frac{M}{2a}.$$

Nach der am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundenen Gleichung hat also der Stossdruck die Grösse:

$$D = \frac{Mv^2}{a}.$$

Wenn in einem Gefässe von der Form eines Würfels, dessen Kante die Länge a hat, parallel zu jeder von den drei Kantenrichtungen eine Kugelschaar von der Massensumme $\frac{M}{3}$ hin und her fliegt, so hat der Stossdruck gegen jede Seitenfläche die Grösse:

$$P = \frac{Mv^2}{3a}.$$

Wenn mit p der durchschnittliche Druck pro Flächeneinheit und mit q das Gewicht der Masse, welche durchschnittlich in jeder Kubikeinheit enthalten ist, bezeichnet wird, so ist:

$$P = pa^2 \quad \text{und} \quad M = \frac{qa^3}{g}$$

zu setzen, und nach Substitution dieser Werthe erhält man die Gleichung:

$$p = \frac{qv^2}{3g}.$$

Nach derselben Gleichung würde der Stossdruck pro Flächeneinheit auch dann zu berechnen sein, wenn die Kugeln mit der Geschwindigkeit v zwischen zwei im unendlich kleinen Abstande Δ von einander befindlichen parallelen ebenen festen Wandflächen nach allen Richtungen des Raumes in solcher Weise sich bewegen, dass alle Bewegungsrichtungen gleich häufig vorkommen (Fig. 173). Der Winkel α, um welchen die Bewegungsrichtung irgend einer Kugel von der Normalen der Wandflächen abweicht, soll der Richtungswinkel dieser Kugel genannt werden. Die Massensumme dM aller derjenigen Kugeln, deren Richtungswinkel zwischen α und $\alpha + d\alpha$ liegt, verhält sich zur Gesammtmasse M wie die in Fig. 174 dargestellte Kugelzone zur ganzen Kugeloberfläche; folglich ist:

Fig. 173.



Fig. 174.

$$\frac{dM}{M} = \frac{2r \sin\alpha \, . \, \pi r d\alpha}{4r^2\pi}, \quad \text{oder:}$$

$$dM = \frac{M \sin\alpha \, . \, d\alpha}{2}.$$

Da jede Kugel vom Richtungswinkel α zwischen zwei auf einander folgenden Stössen gegen eine und dieselbe Wandfläche den Weg:

$$\sigma = \frac{2\Delta}{\cos\alpha}$$

zurücklegt, so hat die Zahl, welche angiebt, wie oft in jeder Secunde die Massensumme dM die eine der beiden Wandflächen trifft, die Grösse:

$$\frac{v}{\sigma} = \frac{v \cos\alpha}{2\Delta}.$$

Die Masse dM liefert also zu der pro Secunde gegen eine der beiden Flächen F stossenden Masse den Beitrag:

$$dm = dM\frac{v}{\sigma} = \frac{dM\,v\cos\alpha}{2\Delta},$$

und zu dem ganzen Stossdrucke gegen diese Fläche den Beitrag:

$$dP = 2\,dm\,v\cos\alpha = \frac{dM\,v^2\cos\alpha^2}{\Delta}.$$

Nach Substitution des oben für dM gefundenen Werthes nimmt diese Gleichung die folgende Form an:

$$dP = \frac{Mv^2}{2\Delta}\cos\alpha^2\sin\alpha\,d\alpha.$$

Der ganze Stossdruck gegen jede von den beiden Flächen F ist also zu berechnen aus der Gleichung:

$$P = \frac{Mv^2}{2\Delta}\int_0^{\pi}\cos\alpha^2\sin\alpha\,d\alpha = \frac{Mv^2}{3\Delta},$$

aus welcher man nach Substitution der Werthe $P = pF$ und $M = \frac{qF\Delta}{g}$ für den Druck pro Flächeneinheit wiederum den obigen Werth erhält:

$$p = \frac{qv^2}{3g}.$$

Nach der kinetischen Theorie der Gase ist der Druck, welchen eine Gasmasse gegen die Wände des dieselbe einschliessenden Gefässes ausübt, als Stossdruck der nach allen Richtungen des Raumes sich bewegenden Moleküle des Gases aufzufassen. Wenn man also die letzteren als unendlich kleine vollkommen elastische Kugeln betrachtet und annimmt, dass alle Moleküle mit gleichen Geschwindigkeiten sich bewegen, so kann man die obige Gleichung benutzen, um aus den gegebenen Werthen von p und q die Grösse der Geschwindigkeit v zu berechnen.

Für gewöhnliche atmosphärische Luft von der Temperatur Null Grad Celsius ist bei mittlerem Barometerstande in der Höhe Null über der Erdoberfläche: $p = 10333$ Kil. und $q = 1,293$ Kil. zu setzen. Hiernach erhält man aus der obigen Gleichnng den Werth:

$$v = \sqrt{\frac{3 \cdot 9,8 \cdot 10333}{1,293}} = 485^{\mathrm{m}}$$

für die Geschwindigkeit, mit welcher die Luftmoleküle bei mittlerem Zustande der Atmosphäre in der Nähe der Erdoberfläche sich bewegen.

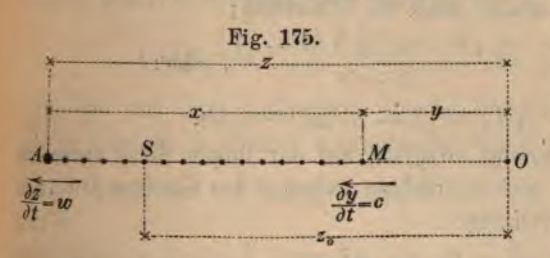
§ 92.

Stoss der unelastischen Kette gegen eine bewegliche Masse.

Denkt man sich in Fig. 170 die feste Wand weggenommen und den im Punkte A concentrirten Theil der Kette beweglich, so erkennt man, dass in diesem Falle die einzelnen materiellen Punkte des mit der constanten Geschwindigkeit c sich bewegenden, geradlinig ausgestreckten Theiles, indem sie der Reihe nach gegen die im Punkte A concentrirte Masse stossen, dieselbe in Bewegung versetzen und derselben stets neue Geschwindigkeiten mittheilen werden. Die Beschleunigung dieser Bewegung wird fortdauern bis zu dem Augenblicke, wo die sämmtlichen materiellen Punkte in dem vorderen Endpunkte A der Kette sich vereinigt haben, worauf dann die Bewegung der in diesem Punkte concentrirten Masse gleichförmig sich fortsetzt.

Mit Beibehaltung der im vorigen Paragraphen gewählten Bezeichnungsweise erhält man für den Abstand des Schwerpunktes der ganzen Kette von dem vorderen Endpunkte A wieder den Ausdruck:

Fig. 175.



$$x_0 = \frac{x^2}{2L}.$$

Nach Fig. 175 ergiebt sich also für den Abstand des Schwerpunktes von dem festen Punkte O der Werth:

$$1) \quad z_0 = z - \frac{x^2}{2L}.$$

Indem man diese Gleichung differenziirt, erhält man für die Geschwindigkeit des Schwerpunktes den Ausdruck:

$$2) \quad \frac{dz_0}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{x}{L}\frac{dx}{dt}.$$

Da keine äussere Kräfte auf die Kette einwirken, so ist diese Geschwindigkeit nach dem Gesetze des Schwerpunktes als eine unveränderliche Grösse demjenigen Werthe gleichzusetzen, welchen dieselbe in dem als Anfangspunkt gewählten Zeitpunkte schon hatte. Nach den in Fig. 175 angegebenen Bezeichnungen ist:

$$x = z - y, \text{ also: } \frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} - \frac{dy}{dt}, \text{ oder:}$$

$$3) \quad \frac{dx}{dt} = w - c.$$

Man kann daher der Gleichung 2), indem man für die auf der rechten Seite stehenden Differenzialquotienten ihre Werthe substituirt, auch die folgende Form geben:

$$4) \quad \frac{dz_0}{dt} = w - \frac{x}{L}(w - c).$$

Wenn also im Anfange der Bewegung $x = a$ und $w = w_0$ war, so ist nach dem Gesetze des Schwerpunktes:

$$w - \frac{x}{L}(w - c) = w_0 - \frac{a}{L}(w_0 - c), \text{ oder:}$$

$$5) \quad w = \frac{w_0(L - a) + c(a - x)}{L - x}.$$

Um die Grössen z und x als Functionen der Zeit t darzustellen, hat man hierin für w den aus Gleichung 3) zu entnehmenden Werth zu substituiren; man erhält dann die Gleichung:

$$\frac{dx}{dt} + c = \frac{w_0(L - a) + c(a - x)}{L - x}, \text{ oder:}$$

$$(L - x)\,dx = (L - a)(w_0 - c)\,dt.$$

Wenn man diese Gleichung integrirt, auf der linken Seite zwischen den Grenzen a und x, auf der rechten zwischen den Grenzen 0 und t, so erhält man die Gleichung:

$$6) \quad Lx - \frac{x^2}{2} - \left(La - \frac{a^2}{2}\right) = (L - a)(w_0 - c)t,$$

welche für x aufgelöst die folgende Form annimmt:

$$7) \quad x = L - \sqrt{(L - a)^2 + 2(L - a)(c - w_0)t}.$$

Um auch die Grösse z als Function der Zeit t darzustellen, hat man $z = y + x$ und $y = ct$ zu setzen, was der Annahme entspricht, dass im Anfange der Punkt M an der Stelle O sich befand, also $z = x = a$ war. Man erhält dann für z die Gleichung:

$$8) \quad z = ct + L - \sqrt{(L - a)^2 + 2(L - a)(c - w_0)t}.$$

Der Kettentheil, welcher schon anfangs im vorderen Endpunkte A concentrirt war, hatte die Länge $L - a$ und die Masse $\gamma(L - a)$. Die oben gefundenen Gleichungen werden daher auch dann noch gültig bleiben, wenn statt dieses Kettentheiles irgend

eine andere Masse von der gleichen Grösse $m = \gamma (L - a)$ in demselben Bewegungszustande an dieser Stelle sich befand, für welchen Fall in den obigen Gleichungen die Werthe:

$$L - a = \frac{m}{\gamma} \text{ und } L = a + \frac{m}{\gamma}$$

zu substituiren sein würden. Wenn $w_0 = 0$ war, also die gestossene Masse anfangs im Ruhezustande sich befand, so wird:

$$9) \quad w = c\left(\frac{a - x}{L - x}\right)$$

und man erhält für diejenige Geschwindigkeit, welche eintritt in dem Augenblicke, wo $x = 0$ wird, also die ganze Masse in einem Punkte concentrirt eine gleichförmige Bewegung annimmt, den Werth:

$$10) \quad w_1 = c\frac{a}{L}.$$

Für die Zeit t_1, nach welcher dieser gleichförmige Bewegungszustand eintritt, erhält man aus der Gleichung 6), indem man darin $x = 0$ und $t = t_1$ setzt, den Werth:

$$11) \quad t_1 = \frac{a}{c}\left(\frac{2L - a}{L - a}\right),$$

und die von dem Endpunkte M der Kette zurückgelegte Wegeslänge erreicht in diesem Augenblicke die Grösse:

$$12) \quad z_1 = ct_1 = a\left(\frac{2L - a}{L - a}\right).$$

Wenn z. B. $a = \frac{1}{2} L$ war, d. h. wenn die gestossene, vorher ruhende Masse m ebenso gross war wie die Masse der stossenden Kette, so wird $w_1 = \frac{1}{2} c$, $t_1 = \frac{3}{2}\frac{L}{c}$ und $z_1 = \frac{3}{2} L$. Die lebendige Kraft hatte anfangs die Grösse $\frac{\gamma a c^2}{2} = \frac{m c^2}{2}$ und nimmt während des Stosses ab bis auf die Grösse $\frac{\gamma L w_1^2}{2} = \frac{m c^2}{4}$; es fand also ein Verlust an lebendiger Kraft statt ebenfalls von der Grösse $\frac{m c^2}{4}$.

§ 93.

Bewegung der Kette unter Einwirkung der Schwerkraft.

Wenn ein Theil der Kette von einer unbeweglichen horizontalen Platte getragen wird, während der andere Theil durch eine in dieser Platte befindliche Oeffnung frei herabhängt, so wird dem letzteren durch die Schwerkraft eine beschleunigte Bewegung ertheilt, und es wird derselbe die einzelnen materiellen Punkte des oberen ruhenden Kettentheiles einen nach dem anderen in stetiger Folge mit in die Bewegung hineinziehen. Man kann die ganze Massensumme der zu dem oberen ruhenden Kettentheile gehörenden materiellen Punkte wiederum als in einem Punkte A concentrirt betrachten und annehmen, dass bei jedem einzelnen dieser materiellen Punkte die vorher durch den Gegendruck der festen Unterlage aufgehobene Schwerkraft erst beginnt ihre Wirkung zu äussern in dem Augenblicke, wo der materielle Punkt aus dem Ruhezustande in Bewegung übergehend der frei herabhängenden Reihe sich anschliesst.

Je grösser die Geschwindigkeit der ablaufenden Kette wird, um so grösser wird die Kraft, welche erforderlich ist, um an der Stelle A den vorher ruhenden materiellen Punkten diese Geschwindigkeit mitzutheilen, und um so grösser wird auch der Widerstand, welcher einer ferneren Geschwindigkeitszunahme entgegenwirkt. Wenn also die Länge und das Gewicht des in Bewegung begriffenen Kettentheiles dadurch constant erhalten wird, dass unten bei B eine zweite unbewegliche horizontale Ebene die Kette auffängt und die lebendige Kraft der daselbst ankommenden materiellen Punkte vernichtet, so wird die Geschwindigkeit des Ablaufens eine gewisse Grenze nicht überschreiten können, diejenige nämlich, bei welcher der allmählich wachsende Widerstand die Grösse der unverändert bleibenden beschleunigenden Kraft erreicht hat (Fig. 176 und Fig. 177).

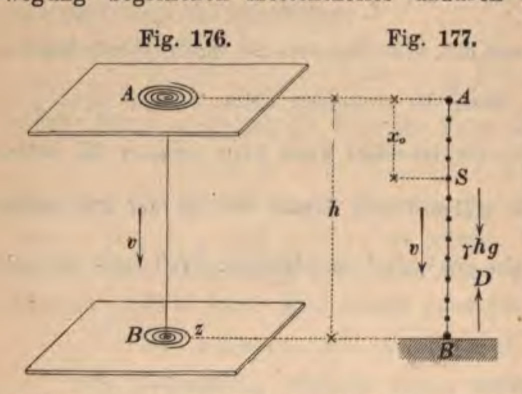


Fig. 176. Fig. 177.

Wenn mit z die Länge des bereits auf der unteren Horizontalebene in B angekommenen und zur Ruhe gelangten Kettentheiles bezeichnet wird, mit L die Länge der ganzen Kette und mit γ die in jeder Längeneinheit derselben enthaltene Masse, so ergiebt sich für den Abstand x_0 des Schwerpunktes der ganzen Kette von der oberen Horizontalebene die Gleichung:

$$\gamma L x_0 = \gamma h \cdot \frac{h}{2} + \gamma z h, \quad \text{oder:} \quad x_0 = \frac{h^2}{2L} + \frac{hz}{L}.$$

Die Geschwindigkeit, mit welcher der Schwerpunkt vertical abwärts sich bewegt, hat also die Grösse:

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{h}{L} \frac{dz}{dt}.$$

Die Geschwindigkeit $\frac{dz}{dt}$, mit welcher die Länge z des unten angekommenen Kettentheiles zunimmt, ist gleich der Geschwindigkeit, mit welcher die Kette unten ankommt, also gleich der Geschwindigkeit v des Ablaufens der Kette; folglich ist:

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{h}{L} v,$$

und man erhält für die Beschleunigung des Schwerpunktes den Ausdruck:

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{h}{L} \frac{dv}{dt}.$$

Der Gegendruck der unteren Horizontalebene setzt sich aus zwei Theilen zusammen: der eine Theil hebt das Gewicht $\gamma z g$ des auf derselben bereits zur Ruhe gelangten Kettentheiles auf, der andere Theil wird darauf verwendet, die lebendige Kraft der in stetiger Folge mit der Geschwindigkeit v gegen die Ebene stossenden materiellen Punkte zu vernichten, und hat als Stossdruck nach § 90 die Grösse:

$$D = \gamma v^2.$$

Der nicht aufgehobene Theil des Kettengewichtes hat die Grösse $\gamma h g$, und der Ueberschuss dieser Kraft über den Gegendruck D ertheilt dem Schwerpunkte der Kette die Beschleunigung:

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{\gamma h g - \gamma v^2}{\gamma L}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden für die Beschleunigung des Schwerpunktes gefundenen Ausdrücke erhält man die Gleichung:

$$h \frac{dv}{dt} = gh - v^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dass das Wachsen der Geschwindigkeit aufhört, sobald dieselbe die Grösse $v = \sqrt{gh}$ erreicht hat. Wenn man abkürzungsweise $\frac{v}{\sqrt{gh}} = u$ setzt, so kann man der obigen Gleichung auch die folgende Form geben:

$$dt = \frac{h\,dv}{gh - v^2} = \sqrt{\frac{h}{g}} \cdot \frac{du}{1 - u^2}, \quad \text{oder:}$$

$$2\sqrt{\frac{g}{h}} \cdot dt = \frac{du}{1 + u} + \frac{du}{1 - u}.$$

Durch Integration dieser letzteren Gleichung erhält man unter der Voraussetzung, dass für $t = 0$ auch $v = 0$ war, die Gleichung:

$$2\sqrt{\frac{g}{h}} \cdot t = \lg(1 + u) - \lg(1 - u) = \lg\left(\frac{1 + u}{1 - u}\right),$$

welche für die Grösse $u = \frac{v}{\sqrt{gh}}$ aufgelöst die folgende Form annimmt:

$$\frac{v}{\sqrt{gh}} = \frac{e^{2t\sqrt{\frac{g}{h}}} - 1}{e^{2t\sqrt{\frac{g}{h}}} + 1}$$

und zeigt, dass die Geschwindigkeit v erst nach unendlich langer Zeit jenen Grenzwerth $v = \sqrt{gh}$ erreicht.

Um die Grösse z als Function der Geschwindigkeit v darzustellen, hat man die Gleichung:

$$dt = \frac{h\,dv}{gh - v^2},$$

indem man dieselbe mit der Gleichung $\frac{dz}{dt} = v$ multiplicirt, auf die Form zu bringen:

$$-\frac{2dz}{h} = -\frac{2v\,dv}{gh - v^2}.$$

Durch Integration derselben erhält man alsdann die Gleichung:

$$-\frac{2}{h}\int_0^z dz = \int_0^v \frac{-2v\,dv}{gh - v^2}, \quad \text{oder:} \quad -\frac{2z}{h} = \lg\left(\frac{gh - v^2}{gh}\right),$$

welche letztere für z aufgelöst die folgende Form annimmt:

$$z = \frac{h}{2}\lg\left(\frac{gh}{gh - v^2}\right)$$

und zeigt, dass $z = \infty$ wird, wenn $v = \sqrt{gh}$ wird; d. h. erst nach-

dem die Länge des abgelaufenen Theiles der Kette unendlich gross geworden ist, erreicht die Geschwindigkeit den Grenzwerth $\sqrt{gh}$.

§ 94.

Allgemeinere Form des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten für Kräfte, deren Wirkungen theilweise durch Ungleichungen auszudrücken sind.

Im elften Capitel wurde an einigen Beispielen gezeigt, dass es Fälle giebt, in denen die Wirkung einer Kraft auf einen materiellen Punkt auch ausgedrückt werden kann durch eine Bedingungsgleichung, welcher die Coordinaten desselben unterworfen sein sollen. Die Gleichung:

$$F(x, y, z) = 0$$

drückt aus, dass der materielle Punkt in der durch diese Gleichung bestimmten Fläche zu bleiben gezwungen ist, oder dass fortwährend eine rechtwinkelig zu dieser Fläche gerichtete Widerstandskraft vorhanden ist, welche den materiellen Punkt verhindert, nach der einen oder der anderen Seite hin aus der Fläche herauszutreten.

Denkt man sich diese Fläche als Oberfläche eines unbeweglichen undurchdringlichen Körpers, so erkennt man leicht, dass auch solche Fälle vorkommen können, in denen nur nach einer Seite hin dem Heraustreten aus der Fläche ein Widerstand entgegenwirkt, während der ganze auf der anderen Seite der Fläche liegende Raum dem materiellen Punkte als Bewegungsgebiet zugänglich bleibt. In solchen Fällen würde das Vorhandensein jener Widerstandskraft nicht durch eine Gleichung auszudrücken sein, sondern vielmehr durch eine Ungleichung von der Form:

$$F(x, y, z) \geqq 0.$$

Wenn z. B. jener feste Körper eine Kugel wäre vom Halbmesser l, so würde das Vorhandensein des Widerstandes, welcher dem Eindringen des materiellen Punktes in den inneren von der Kugelfläche eingeschlossenen Raum entgegenwirkt, auszudrücken sein durch eine Ungleichung von der Form:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqq l^2, \quad \text{oder:} \quad x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \geqq 0.$$

Wie in diesem Falle nur der ausserhalb der Kugelfläche befindliche Raum das dem materiellen Punkte zugängliche Bewegungsgebiet bildet, so kann auch der umgekehrte Fall vorkommen, in welchem nur der innerhalb der Kugelfläche befindliche Raum demselben zugänglich ist, und die Bewegung des materiellen Punktes einer Bedingung unterworfen ist von der Form:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq l^2, \quad \text{oder:} \quad l^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \geqq 0.$$

Diesen letzteren Fall würde man z. B. dadurch verwirklichen können, dass man den materiellen Punkt durch einen Faden von der Länge l mit dem festen Mittelpunkte der Kugelfläche verbindet.

Wenn der materielle Punkt, dessen Coordinaten einer solchen Bedingung unterworfen sind, sich auf der Fläche im Gleichgewicht befinden soll, so muss die Mittelkraft der sämmtlichen sonstigen auf denselben wirkenden Kräfte so gerichtet sein, dass sie durch jenen einseitig wirkenden Widerstand aufgehoben werden kann, also rechtwinkelig gegen die Fläche und zwar nach der Seite des unzugänglichen Gebietes hin. Denkt man sich dem materiellen Punkte irgend eine mögliche Verschiebung ertheilt, d. h. eine solche, bei welcher die vorgeschriebene Bedingung erfüllt bleibt, so erkennt man leicht, dass die von jener Mittelkraft dabei verrichtete mechanische Arbeit entweder Null oder negativ sein wird. Die Arbeit wird Null sein, wenn der materielle Punkt bei der Verschiebung in der Fläche blieb; negativ dagegen, wenn desselbe aus der Fläche heraustrat nach der Seite des zugänglichen Raumgebietes hin. Wenn also dieser materielle Punkt einem Systeme angehörte, auf welches das Princip der virtuellen Geschwindigkeit angewendet werden soll, so würde die Form, in welcher das Princip in § 72 aufgestellt wurde, zu modificiren sein, und dasselbe vielmehr in folgender Form ausgesprochen werden müssen:

„Ein System von materiellen Punkten befindet sich im Gleichgewichtszustande, wenn bei jeder möglichen unendlich kleinen Verschiebung desselben die Summe der von den wirkenden Kräften verrichteten mechanischen Arbeiten entweder Null oder negativ ist."

Nicht nur bei dem hier als Beispiel gewählten speciellen Falle eines materiellen Punktes, der stets auf einer Seite einer festen Fläche zu bleiben gezwungen ist, sondern auch bei allen übrigen Fällen, in denen unter den vorgeschriebenen Bedingungen solche vorkommen, welche durch Ungleichungen — statt durch Gleichungen — auszudrücken sind, lässt sich nachweisen, dass das Princip in der obigen allgemeineren Form ausgesprochen werden muss.

Wenn z. B. zwei materielle Punkte durch einen unausdehnbaren Faden von der Länge l verbunden sind, so ist ihre Bewegung einer Bedingnng unterworfen von der Form:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \leqq l^2.$$

Sollen diese beiden materiellen Punkte im Gleichgewichtszustande sich befinden, so müssen die Mittelkräfte der auf sie wirkenden Kräfte entweder Null sein, oder es müssten dieselben als zwei gleich grosse entgegengesetzte Kräfte (wie die beiden Kräfte K in Fig. 141 wirkend) den Faden in gespanntem Znstande halten. Zu den möglichen Verschiebungen würde in letzterem Falle auch eine solche gehören, bei welcher der Abstand zwischen den beiden mate-

riellen Punkten um die Grösse dl sich verkürzt, und nach § 73 (Gleichung 4) würden die beiden Kräfte K bei dieser Verschiebung die mechanische Arbeit

$$\mathfrak{A} = -K\,dl$$

verrichten. Es würde also auch in diesem Falle ausreichen, als Bedingung des Gleichgewichtes nachzuweisen, dass bei keiner möglichen Verschiebung positive mechanische Arbeit verrichtet werden kann.

Um sich von der allgemeinen Gültigkeit der oben aufgestellten neuen Form des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten zu überzeugen, hat man sich zunächst klar zu machen, dass das Gleichgewicht eines im Ruhezustande befindlichen Systems von n materiellen Punkten keine Störung erleiden würde, wenn $n-1$ derselben in feste Punkte verwandelt würden. Die Gleichung:

$$f\begin{pmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n, & y_n, & z_n \end{pmatrix} = 0$$

drückt aus, dass wenn $n-1$ Punkte fest liegen, der n-te nur in der durch diese Gleichung bestimmten Fläche sich bewegen kann, und die Ungleichung:

$$f\begin{pmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n, & y_n, & z_n \end{pmatrix} \geqq 0$$

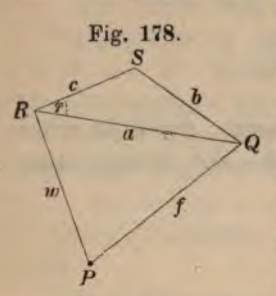
würde ausdrücken, dass demselben nur der auf der einen Seite dieser Fläche liegende Raum als Bewegungsgebiet zugänglich ist. Die Gleichgewichtsbedingungen erfordern also, dass die Mittelkraft der sonstigen auf diesen materiellen Punkt wirkenden Kräfte entweder Null ist oder rechtwinkelig gegen diese Fläche nach der Seite des unzugänglichen Raumgebietes hin wirkt. Im letzteren Falle muss dieselbe aufgehoben werden durch die Mittelkraft von denjenigen Widerstandskräften, durch welche die obige Bedingung ihre Wirksamkeit äussert. Diese Kräfte haben entweder in den übrigen $n-1$ materiellen Punkten oder in gewissen festen Punkten ihre Ausgangspunkte, und nach dem Gesetze der Wechselwirkung müssen diese Ausgangspunkte dabei die entsprechenden Gegenwirkungen erleiden. Indem man sich dieses ganze System von Widerstandskräften zerlegt denkt in die einzelnen Paare, durch welche je zwei Punkte mit einander nach dem Gesetze der Wechselwirkung verbunden sind, erkennt man dann leicht, dass bei jedem einzelnen dieser Paare entweder die bei dem ersten oder bei dem zweiten der vorher untersuchten speciellen Fälle benutzte Art der Beweisführung wiederum angewendet werden kann.

§ 95.

Gauss'sches Princip des kleinsten Zwanges.

Die Bewegung, welche ein System von materiellen Punkten unter dem Einflusse gewisser vorgeschriebener Bedingungen wirklich ausführt, wird im Allgemeinen verschieden sein von derjenigen Bewegung, welche dasselbe ohne das Vorhandensein dieser Bedingungen ausgeführt haben würde. Wenn $PR = w$ die von einem der materiellen Punkte während des Zeittheilchens dt wirklich ausgeführte Bewegung ist, und $PQ = f$ die freie Bewegung desselben bedeutet, nämlich diejenige Bewegung, welche der materielle Punkt ohne das Vorhandensein der Bedingungen unter dem Einflusse der auf ihn wirkenden Kräfte während der Zeit dt ausgeführt haben würde, so stellt die Verbindungslinie $QR = a$ die Ablenkung desselben von seiner freien Bewegung dar (Fig. 178); und wenn mit m die Masse des materiellen Punktes bezeichnet wird, so kann der Ausdruck:

Fig. 178.



$$1)\quad Z = \Sigma\,(ma^2)$$

als Maass des Zwanges betrachtet werden, welcher dem Systeme durch die vorgeschriebenen Bedingungen auferlegt wird. Nach dem Gauss'schen Principe erfolgt nun die wirkliche Bewegung des Systems stets in möglichster Uebereinstimmung mit der freien Bewegung oder unter möglichst kleinem Zwange, d. h. die wirkliche Bewegung geschieht in solcher Weise, dass in jedem Zeittheilchen die oben als Maass des Zwanges definirte Grösse Z ein Minimum wird.

Die Punkte R als wirkliche Orte der materiellen Punkte am Ende des Zeittheilchens dt bilden jedenfalls eine der möglichen (d. h. den vorgeschriebenen Bedingungen genügenden) Lagen des Systems. Wenn der Punkt S in Fig. 178 als Repräsentant irgend einer anderen möglichen Lage des Systems betrachtet wird, so ist $\Sigma\,(mb^2)$ der Ausdruck für den Zwang, welchen das System erlitten haben würde, wenn dasselbe in die Lage S gelangt wäre — anstatt in die Lage R —. Zum Beweise des oben aufgestellten Satzes ist es also erforderlich nachzuweisen, dass unter allen Umständen $\Sigma\,(ma^2)$ kleiner ist als $\Sigma\,(mb^2)$. Nach Fig. 178 ist:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi, \quad \text{oder:}$$

2) $\Sigma(ma^2) = \Sigma(mb^2) - \Sigma(mc^2) + 2\Sigma(mac\cos\varphi)$.

Glied $\Sigma(mc^2)$ kann der Natur der Sache nach unter allen tänden nur positiv sein. Es würde also der Beweis als ge- zu betrachten sein, sobald es gelänge nachzuweisen, dass Ausdruck $\Sigma(mac\cos\varphi)$ entweder Null oder negativ ist. Zu m Beweise kann der am Schlusse des § 78 gefundene Satz tzt werden, nach welchem die durch den Einfluss der vor- hriebenen Bedingungen aufgehobenen Kräfte für sich allein end das System im Gleichgewichte halten würden.

Die Ablenkung $QR = a$ kann betrachtet werden als die Be- ing, welche der materielle Punkt unter Einwirkung derjenigen te ausführt, durch welche die vorgeschriebenen Bedingungen Wirksamkeit äussern. Wenn mit K die Mittelkraft dieser te bezeichnet wird, so ist $\frac{K}{m}$ die Beschleunigung, welche sie materiellen Punkte ertheilt, folglich ist:

3) $\frac{K}{m}\frac{dt^2}{2} = a$

Wegeslänge, welche derselbe unter Einwirkung dieser Kraft end der Zeit dt zurücklegt. Die Kräfte K in entgegengesetzten tungen genommen bilden zusammen das System der aufge- nen Kräfte, auf welche nach § 78 die allgemeinen Gleich- chtsbedingungen angewendet werden dürfen. Es müssen daher Kräfte so beschaffen sein, dass sie bei irgend einer mög- en unendlich kleinen Verschiebung von denselben verrichtete anische Arbeit entweder Null oder negativ ist (vergl. § 94). Repräsentant einer solchen möglichen Verschiebung des Sy- s kann die Linie $RS = c$ betrachtet werden, und für die anische Arbeit, welche jene Kräfte bei dieser Verschiebung chten würden, erhält man nach Fig. **178** die Gleichung:

4) $\mathfrak{A} = \Sigma(Kc\cos\varphi)$,

he nach Substitution des aus Gleichung 3) für K zu entneh- len Werthes die Form annimmt:

5) $\mathfrak{A} = \frac{2\Sigma(mac\cos\varphi)}{dt^2}$.

dieser Ausdruck entweder Null oder negativ sein muss, so uch:

6) $\Sigma(mac\cos\varphi) \leqq 0$,

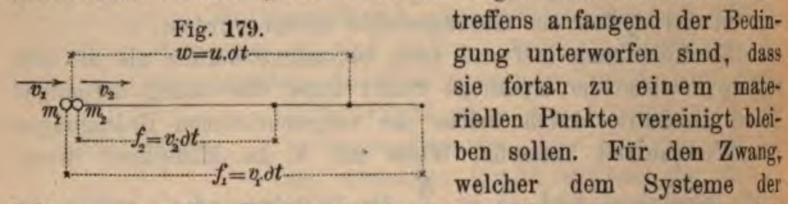
damit der Beweis geführt, dass $\Sigma(ma^2)$ stets kleiner ist als ib^2).

§ 96.

Anwendungen des Gauss'schen Princips.

Wenn man bei dem in Fig. **165** dargestellten Falle des Stosses die beiden Massen m_1 und m_2 so beschaffen waren, dass die Bedingungen des vollkommen unelastischen Stosses als erfüllt betrachtet werden dürften, so würde man dieselben als zwei materielle Punkte ansehen dürfen, welche von dem Augenblicke ihres Zusammentreffens anfangend der Bedingung unterworfen sind, dass sie fortan zu **einem** materiellen Punkte vereinigt bleiben sollen. Für den Zwang, welcher dem Systeme der beiden materiellen Punkte durch diese Bedingung auferlegt wird, erhält man nach Fig. **179** die Gleichung:

Fig. 179.



$$Z = m_1 (f_1 - w)^2 + m_2 (f_2 - w)^2,$$

in welcher für die Grösse w, als die von beiden materiellen Punkten gemeinschaftlich während des nächstfolgenden Zeitelements dt wirklich zurückgelegte Wegeslänge, derjenige Werth zn substituiren ist, für welchen Z ein Minimum wird. Indem man $\frac{dZ}{dw} = 0$ setzt, erhält man für diesen Werth die Gleichung:

$$0 = -2m_1 (f_1 - w) - 2m_2 (f_2 - w), \quad \text{oder:} \quad w = \frac{m_1 f_1 + m_2 f_2}{m_1 + m_2},$$

und wenn man hierin für die Grössen f_1, f_2, w die in Fig. 179 angegebenen Werthe substituirt, so erhält man für die gemeinschaftliche Geschwindigkeit der beiden Massen nach dem Stosse die Gleichung:

$$u\,dt = \frac{m_1 v_1 dt + m_2 v_2 dt}{m_1 + m_2}, \quad \text{oder:} \quad u + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

also dieselbe Gleichung, welche in § 87 aus dem Gesetze des Schwerpunktes abgeleitet wurde.

Auch in Bezug auf die Bewegung der Kette würde in allen den Fällen, auf welche in § 88 . . 93 das Gesetz des Schwerpunktes angewendet wurde, das Gauss'sche Princip zu den gleichen Resultaten geführt haben. Bei dem in Fig. **167** dargestellten Falle z. B. würde als freie Bewegung des geradlinig ausgestreckten Kettentheiles die Strecke $f = v dt$ zu betrachten sein, welche derselbe nach dem Gesetze der Trägheit während des nächstfolgenden

Zeitelements dt zurücklegen würde, wenn die Geschwindigkeit keine Aenderung erlitte. Die wirkliche Bewegung w wird in Folge der eintretenden Geschwindigkeitsänderung von dieser freien Bewegung verschieden sein, und kann dieselbe betrachtet werden als eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, deren Anfangsgeschwindigkeit v war, und deren (negative) Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ ist. Folglich ist:

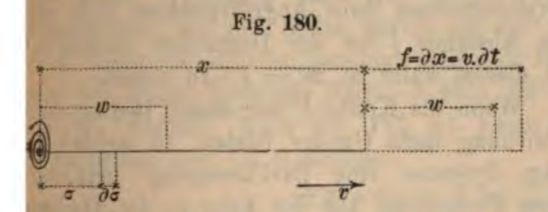
$$w = v\,dt + \left(\frac{dv}{dt}\right)\frac{dt^2}{2}.$$

Für alle Massenpunkte dieses geradlinig ausgestreckten Kettentheiles hat die Ablenkung von der freien Bewegung die gemeinschaftliche Grösse:

$$f - w = -\left(\frac{dv}{dt}\right)\frac{dt^2}{2}.$$

Das während der Zeit dt in die Bewegung eintretende Kettenstück hat die Länge w, und da dasselbe im Anfange der Zeit dt noch im Ruhezustande sich befand, so ist für alle Massenpunkte desselben die freie Bewegung gleich Null. Die Ablenkung σ von der freien Bewegung hat verschiedene Grössen für die verschiedenen Massenpunkte dieses Stückes und variirt zwischen den Grenzen 0 und w (Fig. 180).

Fig. 180.



Für den Zwang, welcher dem ganzen Systeme durch die vorgeschriebenen Bedingungen auferlegt wird, erhält man hiernach den folgenden Ausdruck:

$$Z = \gamma x (f - w)^2 + \int_0^w \gamma d\sigma \,.\, \sigma^2, \quad \text{oder: } Z = \gamma x (f - w)^2 + \frac{\gamma w^3}{3}.$$

Indem man den Differenzial-Quotienten dieses Ausdrucks nach w genommen gleich Null setzt, gelangt man zu der Gleichung:

$$0 = -2x(f - w) + w^2,$$

welche nach Substitution der oben für die Grössen $f - w$ und w gefundenen Werthe die folgende Form annimmt:

$$0 = +2x\left(\frac{dv}{dt}\right)\frac{dt^2}{2} + \left[v\,dt + \left(\frac{dv}{dt}\right)\frac{dt^2}{2}\right]^2, \quad \text{oder:}$$

$$0 = x\frac{dv}{dt} + \left(v + \frac{1}{2}dv\right)^2.$$

Wenn mann diese Gleichung nach Weglassung des unendlich kleinen Gliedes $\frac{1}{2}dv$ mit dt multiplicirt und alsdann $vdt = dx$ setzt, so erhält man die folgende Gleichung:

$$0 = xdv + vdx, \quad \text{oder:} \quad d(vx) = 0,$$

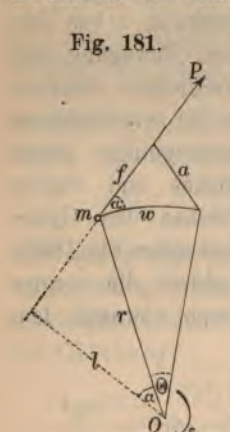
aus welcher folgt, dass die Grösse des Productes vx während der Bewegung unverändert bleibt — wie bereits in § 88 auf anderem Wege gefunden wurde.

Wenn ein ruhendes, um eine feste Drehachse O drehbares System von unveränderlich verbundenen materiellen Punkten durch die auf dasselbe wirkenden Kräfte P nicht in Bewegung gesetzt werden soll, so muss nach § 74 die Bedingungsgleichung erfüllt sein:

$$\Sigma(\mathfrak{M}) = 0,$$

in welcher $\mathfrak{M}$ das statische Moment der Kraft P in Bezug auf die Drehachse O bedeutet (Fig. **181**). Es soll angenommen werden, dass die Richtungslinie der Kraft P in die Drehungsebene ihres Angriffspunktes fällt und im Abstande l an der Drehachse vorbeigeht. In diesem Falle ist $\mathfrak{M} = Pl$ zu setzen.

Fig. 181.



Wenn die Kräfte P der obigen Bedingungsgleichung nicht Genüge leisten, so werden sie dem Systeme eine Drehbewegung ertheilen. Dem Uebergange aus der Ruhe in die Drehbewegung entspricht eine gewisse Drehbeschleunigung, und diese kann man mit Hülfe des Gauss-schen Princips auf folgende Weise bestimmen.

Die freie Bewegung, welche der materielle Punkt m unter Einwirkung der Kraft P während der Zeit dt ausführen würde, ist als eine gleichförmig beschleunigte zu betrachten, und die Beschleunigung derselben ist gleich $\frac{P}{m}$, folglich ist:

$$f = \frac{P}{m}\frac{dt^2}{2}.$$

Die von dem Systeme während des unendlich kleinen Zeittheilchens dt wirklich ausgeführte Bewegung kann als eine gleichförmig beschleunigte Drehbewegung betrachtet werden, bei welcher

er Punkt m den unendlich kleinen Bogen $w = r\theta$ durchläuft. Venn also mit ε die Beschleunigung dieser Drehbewegung beeichnet wird, so ist:

$$\theta = \varepsilon \frac{dt^2}{2}, \quad \text{oder:} \quad w = r \varepsilon \frac{dt^2}{2}.$$

Die Ablenkung des Punktes m von seiner freien Bewegung ist nach Fig. 181 zu bestimmen aus der Gleichung:

$$a^2 = f^2 + w^2 - 2fw \cos \alpha.$$

Der Zwang, welcher dem Systeme durch die vorgeschriebenen Bedingungen auferlegt wird, hat also die Grösse:

$$Z = \Sigma \{m (f^2 + w^2 - 2fw \cos \alpha)\}.$$

Venn man den Differenzial-Quotienten dieses Ausdrucks gleich Null etzt, so erhält man die Gleichung:

$$= 2\Sigma \{m(w - f \cos \alpha)\, dw\}, \quad \text{oder:} \quad \Sigma(mw\, dw) = \Sigma(mf \cos \alpha\, dw),$$

velche nach Substitution der Werthe $w = r\theta$ und $dw = r d\theta$ die Form annimmt:

$$\Sigma(mr^2 \theta\, d\theta) = \Sigma(mfr \cos \alpha\, d\theta).$$

n dieser Gleichung kann die Grösse $d\theta$ als gemeinschaftlicher Factor aller auf der linken sowohl als auf der rechten Seite unter lem Summationszeichen vereinigten Glieder fortgelassen werden, und uf der linken Seite der Factor θ auch vor das Summationszeichen gesetzt werden. Nach Fig. 181 ist ferner $r \cos \alpha = l$ zu setzen. Man erhält also die Gleichung:

$$\theta\, \Sigma(mr^2) = \Sigma\, (mfl),$$

velcher nach Substitution der oben für θ und f gefundenen Werthe lie Form annimmt:

$$\varepsilon \frac{dt^2}{2} \Sigma(mr^2) = \Sigma \left(m \frac{P}{m} \frac{dt^2}{2} l\right), \quad \text{oder:} \quad \varepsilon = \frac{\Sigma(Pl)}{\Sigma(mr^2)}.$$

Der Ausdruck $\Sigma\,(mr^2)$ wird das Trägheitsmoment des Körpers n Bezug auf die Drehachse genannt. Man erhält also die Winkelbeschleunigung, indem man die Summe der statischen Momente der virkenden Kräfte durch das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug uf seine feste Drehachse dividirt.

Für den Fall, dass der Körper in dem Zeitpunkte, für welchen lie Winkelbeschleunigung desselben bestimmt werden soll, schon ine gewisse Drehgeschwindigkeit ω besass, hat man die Bewegung les Körpers aufzufassen als relative Bewegung in Bezug auf einen nit derselben Geschwindigkeit ω sich drehenden Raum und zu be-

rücksichtigen, dass die nach den Gesetzen der relativen Bewegung hinzuzufügenden Centrifugalkräfte keine Beiträge liefern zu der Summe der statischen Momente. Man erkennt dann leicht, dass die obige Gleichung auch für diesen Fall gültig bleibt.

Wenn ferner die Richtungslinien der wirkenden Kräfte nicht — wie oben vorausgesetzt wurde — in die Drehungsebenen ihrer Angriffspunkte hineinfielen, so würde man diesen Fall auf den vorigen dadurch zurückführen können, dass man eine jede derselben zerlegt in zwei rechtwinkelig zu einander gerichtete Seitenkräfte, von denen die eine parallel zur festen Drehachse wirkend durch die Widerstände derselben aufgehoben wird, und die andere in die Drehungsebene des Angriffspunktes hineinfallend die Projection der wirklichen Kraft auf diese Ebene bildet. Mit Berücksichtigung der in § 74 gegebenen Definition des „statischen Momentes einer Kraft in Bezug auf eine Drehachse“ erkennt man dann, dass die Form, in welcher das Gesetz der Winkelbeschleunigung oben ausgesprochen wurde, auch für diesen Fall ihre Gültigkeit behält.

CAPITEL XIII.

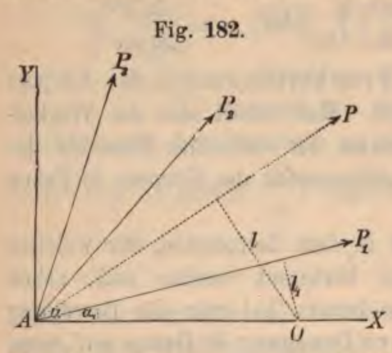
Drehbwegungen eines Systems von materiellen Punkten.

§ 97.

Gesetz der statischen Momente.

Für die Mittelkraft P von mehreren an gemeinschaftlichem Angriffspunkte A wirkenden Kräften P_1, $P_2 \ldots$, der Richtungslinien in einer und derselben Ebene AXY liegen, erhält man nach Fig. 182 die Gleichung:

Fig. 182.



$$P \sin\alpha = P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + \ldots,$$

welche nach Substitution der für die Grössen $\sin\alpha$, $\sin\alpha_1 \ldots$ aus der Figur zu entnehmenden Werthe die Form annimmt:

$$P\frac{l}{AO} = P_1\frac{l_1}{AO} + P_2\frac{l_2}{AO} + \ldots,$$

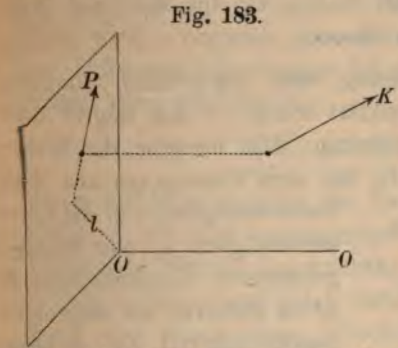
oder: $Pl = P_1 l_1 + P_2 l_2 + \cdots$

Die Grössen l, l_1 . . . als Abstände der Kraftrichtungen von dem

Punkte O werden die Hebelarme in Bezug auf diesen Punkt genannt und sind als positive oder negative Grössen in Rechnung zu bringen, jenachdem die Drehungsrichtung, in welcher die Ebene durch die betreffenden Kräfte und den Punkt O herumgedreht werden würde, von links nach rechts gerichtet oder die entgegengesetzte ist. Das Product „Kraft mal Hebelarm" wird das „statische Moment" der Kraft in Bezug auf den Drehpunkt genannt. Die obige Gleichung drückt also den Satz aus: „Das statische Moment der Mittelkraft ist gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte."

Diesen Satz kann man auch anwenden auf den Fall, in welchem die Kräfte P_1, P_2 . . als die Projectionen zu betrachten sind von gewissen auf einen Punkt im Raume wirkenden Kräften K_1, K_2 . . ., deren Mittelkraft K ist. Das Product Pl, als das statische Moment der Projection P in Bezug auf den Drehpunkt O, nennt man in solchem Falle das statische Moment der Kraft K in Bezug auf die Drehachse OO (Fig. 183). Denkt man sich die sämmtlichen Kräfte nach drei rechtwinkelig zu einander stehenden Coordinaten-Achsen zerlegt, von denen die eine mit der Achse OO zusammenfällt, so überzeugt man sich leicht davon, dass die Projection der Mittelkraft K identisch ist mit der Mittelkraft P von den Projectionen. Es gilt daher auch für die im Raume wirkenden Kräfte K_1, K_2 . . . der Satz: „Das statische Moment der Mittelkraft K in Bezug auf eine bestimmte Achse OO ist gleich der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte K_1, K_2 . . . in Bezug auf ebendieselbe Achse."

Fig. 183.



Der Begriff des statischen Moments lässt sich auch übertragen auf Geschwindigkeiten, Beschleunigungen — überhaupt auf alle solche Grüssen, welche nach dem Parallelogrammgesetze zu einer Resultirenden zusammengesetzt werden können. Wenn man die einzelnen Geschwindigkeiten, Beschleunigungen oder anderen Grössen dieser Art im Gegensatze zu ihrer Resultirenden die „Componenten" nennt, so kann man dem obigen Satze die allgemeinere Form geben: „Das statische Moment der Resultirenden in Bezug auf eine bestimmte Achse ist gleich der Summe der

die vom Radiusvector beschriebene Fläche wächst, oder kürzer ausgedrückt, die „Flächengeschwindigkeit". Man erhält also das statische Moment der Bewegungsgrösse, indem man die Flächengeschwindigkeit mit dem constanten Factor $2m$ multiplicirt.

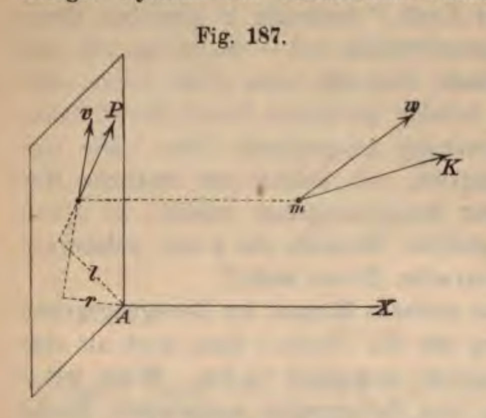
Das statische Moment der Bewegungsgrösse in Bezug auf den Punkt O ist eine constante Grösse, wenn die Richtungslinie der Kraft P beständig durch diesen Punkt selbst hindurchgeht; denn für diesen Fall wird das statische Moment $Pl = 0$, folglich nach Gleichung 1):

$$3) \quad \frac{d\,(mvr)}{dt} = 0, \quad \text{oder:} \quad mvr = \text{Const.}$$

Aus Gleichung 2) folgt, dass in diesem Falle auch die Flächengeschwindigkeit $\frac{df}{dt}$ einen constanten Werth hat. „Wenn also die Kraft, unter deren Einwirkung der materielle Punkt seine Bewegung ausführt, von einem festen Punkte ausgeht, so wächst die vom Radiusvector beschriebene Fläche mit constanter Geschwindigkeit." Dieser Satz wird das Princip der Flächen genannt.

Man kann diesen Satz auch verallgemeinern und auf ein beliebiges System von materiellen Punkten übertragen. Betrachtet man die Geschwindigkeit v als Projection der wirklichen Geschwindigkeit w auf eine feste Ebene, und die Kraft P als Projection der auf den materiellen Punkt im Raume wirkenden Kraft K (Fig. 187), so erkennt man mit Berücksichtigung der im vorigen Paragraphen gegebenen Definitionen, dass der in Gleichung 1) enthaltene Satz für diesen Fall auch in folgender Form ausgesprochen werden kann: „Die Geschwindigkeit, mit welcher das in Bezug auf die Achse AX genommene statische Moment der Bewegungsgrösse mw wächst, ist gleich dem statischen Momente der Kraft K in Bezug auf dieselbe Achse." Wenn also mit $\mathfrak{M}_x$ das statische Moment der Kraft K und mit $\mathfrak{m}_x$ das statische Moment der Bewegungsgrösse mw bezeichnet wird, so kann man der Gleichung 1) auch die folgende Form geben:

Fig. 187.



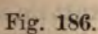
In dieser Gleichung stellt der Ausdruck auf der linken Seite die Zunahme des statischen Moments der Bewegungsgrösse dar, und wenn mit Δt der Zeitabschnitt bezeichnet wird, in welchem diese Zunahme erfolgte, so ergiebt sich für die durchschnittlich in jeder Zeiteinheit erfolgende Zunahme die Gleichung:

$$\frac{mv_1 r_1 - mvr}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} l.$$

Je kleiner der Zeitabschnitt Δt angenommen wird, um so mehr gewinnt der Quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ die Bedeutung der Totalbeschleunigung des materiellen Punktes. Das Product „Masse mal Totalbeschleunigung" stellt die Totalkraft dar, unter deren Einwirkung der materielle Punkt seine Bewegung ausführt. Wenn also diese Kraft mit P bezeichnet wird, so ist Pl der feste Grenzwerth, welchem der Ausdruck auf der rechten Seite sich nähert, wenn Δt unendlich klein wird. Zugleich geht der Ausdruck auf der linken Seite in den Differenzial-Quotienten des statischen Moments der Bewegungsgrösse über; folglich ist:

$$1) \quad \frac{d\,(mvr)}{dt} = Pl.$$

Wenn die Richtungslinie der Kraft P beständig in derselben Ebene bleibt — wie hier vorausgesetzt werden soll — so ist die von dem materiellen Punkte beschriebene Bahnlinie eine ebene Curve, und es gilt in Bezug auf jeden beliebig gewählten Punkt dieser Bahnebene der durch obige Gleichung ausgedrückte Satz: „Die Geschwindigkeit, mit welcher das statische Moment der Bewegungsgrösse wächst, ist gleich dem statischen Momente der Kraft, welche auf den materiellen Punkt wirkt."


Fig. 186.



Das statische Moment der Bewegungsgrösse in Bezug auf den Punkt O kann auch als eine Flächengrösse aufgefasst werden. Wenn mit f die von dem Radiusvector beschriebene Fläche bezeichnet wird, und mit df die während des Zeitelements dt erfolgende Zunahme dieser Fläche, so ist nach Fig. 186:

$$2) \quad \frac{vdt \,.\, r}{2} = df, \quad \text{oder:} \quad mvr = 2m \frac{df}{dt}.$$

In letzterer Gleichung bedeutet $\frac{df}{dt}$ die Geschwindigkeit, mit welcher

In allen diesen Fällen wird die Geschwindigkeit des Wachsens der Grösse $\Sigma(\mathfrak{m}_x)$ ebenfalls gleich Null, folglich:

$$9)\quad \Sigma(\mathfrak{m}_x) = \text{Const.}$$

Nach Gleichung 2) kann jede einzelne von den Grössen $\mathfrak{m}$, als das Product aus der Flächengeschwindigkeit in die doppelte Masse des betreffenden materiellen Punktes betrachtet werden, wobei das Wort „Flächengeschwindigkeit" auf die vom Radiusvector der Projection beschriebene Fläche zu beziehen ist. Man kann daher der Gleichung 9) mit Weglassung des Factor 2 auch die Form geben:

$$10)\quad \Sigma\left(m\frac{df}{dt}\right) = \text{Const.}$$

Wenn als Maass für die Massengrössen eine Masse μ gewählt wird, welche so klein ist, dass die Masse jedes einzelnen materiellen Punktes als Vielfaches derselben durch eine ganze Zahl n sich ausdrücken lässt, so kann man für die Massen der materiellen Punkte die Werthe substituiren:

$$m_1 = n_1\,\mu,\quad m_2 = n_2 \,.\, \mu,\quad m_3 = n_3 \,.\, \mu \ldots,$$

und man kann jeden der materiellen Punkte betrachten als zusammengesetzt aus einer gewissen Anzahl von einfachen materiellen Punkten, deren jeder die Masse μ enthält. Der Gleichung 10) kann man dann mit Weglassung des constanten Factors μ auch die folgende Form geben:

$$11)\quad \Sigma\left(n\frac{df}{dt}\right) = \text{Const.},$$

und wenn man das Summationszeichen „Σ" nunmehr auf die Gesammtzahl dieser einfachen materiellen Punkte bezieht, so kann man statt desen auch setzen:

$$12)\quad \Sigma\left(\frac{df}{dt}\right) = \text{Const.}$$

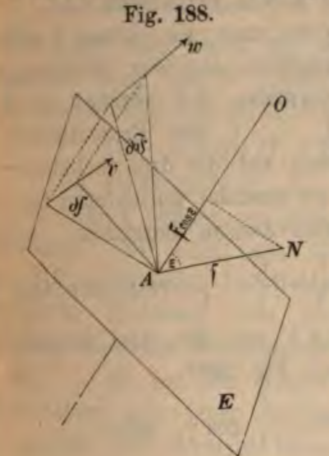
In dieser letzteren Form drückt die Gleichung den folgenden Satz aus: „Wenn in Bezug auf eine feste Achse die Summe der statischen Momente sämmtlicher auf ein System von materiellen Punkten wirkenden Kräfte beständig gleich Null bleibt, so ist für die Projectionen der materiellen Punkte auf die rechtwinkelig zu jener Achse stehende Ebene die Summe der Flächengeschwindigkeiten eine constande Grösse."

§ 99.

Gesetz der unveränderlichen Ebene.

Das von dem Radiusvector der Projection beschriebene Flächenelement df kann nach Fig. 188 betrachtet werden als die Projection des Flächenelements $d\mathfrak{F}$, welches von dem Radiusvector des im Raume sich bewegenden Punktes während des Zeitelements dt beschrieben wird. Ebenso kann man die Flächengeschwindigkeit $\frac{df}{dt}$ betrachten als die Projection der Flächengeschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{F}}{dt}$ des Punktes im Raume. Wenn also mit ε der Winkel bezeichnet wird, welchen die Ebenen dieser beiden Flächenelemente mit einander einschliessen, so ist:

Fig. 188.



$$1)\quad \frac{df}{dt} = \frac{d\mathfrak{F}}{dt} \cos \varepsilon,$$

und wenn abkürzungsweise die Flächengeschwindigkeit $\frac{d\mathfrak{F}}{dt}$ mit $\mathfrak{f}$ bezeichnet wird, so kann man statt dessen auch setzen:

$$2)\quad \frac{df}{dt} = \mathfrak{f} \cos \varepsilon.$$

Der Winkel ε ist zugleich der Winkel, welchen die auf dem Flächenelemente $d\mathfrak{F}$ errichtete Normale AN mit der rechtwinkelig zur Projectionsebene stehenden Achse AO einschliesst. Man würde daher die Projection der Fläche $\mathfrak{f}$ auf die Projectionsebene E in der Weise berechnen können, dass man die Grösse $\mathfrak{f}$ wie eine Längengrösse auf der Normalen AN abträgt, und diese Länge auf die Achse AO projicirt — ein Verfahren, welches in dem folgenden Theile dieser Untersuchung mehrfach zur Anwendung kommen wird.

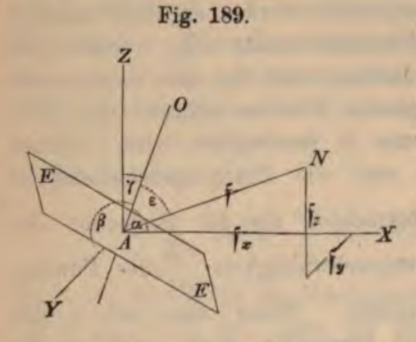
Wenn in Bezug auf die feste Achse AO die Summe der statischen Momente sämmtlicher auf das System von materiellen Punkten wirkenden Kräfte gleich Null ist, so gilt nach dem am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundenen Satze die Gleichung:

$$3)\quad \Sigma(\mathfrak{f} \cos \varepsilon) = \text{Const.},$$

und wenn die genannte Bedingung — wie hier vorausgesetzt werden soll — in Bezug auf j e d e durch den festen Punkt A gelegte Achse erfüllt ist, so gilt auch die obige Gleichung für j e d e belie-

bige durch den Punkt A gelegte Ebene. Unter den Fällen, in welchen diese Bedingung stets erfüllt ist, sind die folgenden zwei Fälle hervorzuheben: erstens, wenn die Richtungslinien der sämmtlichen äusseren Kräfte beständig durch den festen Punkt A hindurchgehen; zweitens, wenn nur innere Kräfte vorhanden sind.

Fig. 189.



Wenn man die Grösse $\mathfrak{f}$ als Längengrösse auf der Richtung der Normalen AN abträgt und mit $\mathfrak{f}_x$, $\mathfrak{f}_y$, $\mathfrak{f}_z$ die Projectionen derselben auf die drei rechtwinkelig zu einander gerichteten Coordinaten-Achsen bezeichnet, so sind $\frac{\mathfrak{f}_x}{\mathfrak{f}}$, $\frac{\mathfrak{f}_y}{\mathfrak{f}}$, $\frac{\mathfrak{f}_z}{\mathfrak{f}}$ resp. die Cosinus der Winkel, welche die Normale AN mit den drei Coordinaten-Achsen einschliesst, folglich ist nach Fig. **189**:

$$4)\quad \cos\varepsilon = \frac{\mathfrak{f}_x}{\mathfrak{f}}\cos\alpha + \frac{\mathfrak{f}_y}{\mathfrak{f}}\cos\beta + \frac{\mathfrak{f}_z}{\mathfrak{f}}\cos\gamma, \text{ oder:}$$

$$5)\quad \Sigma(\mathfrak{f}\cos\varepsilon) = \cos\alpha\,\Sigma(\mathfrak{f}_x) + \cos\beta\,\Sigma(\mathfrak{f}_y) + \cos\gamma\,\Sigma(\mathfrak{f}_z).$$

Die Grössen $\mathfrak{f}_x$, $\mathfrak{f}_y$, $\mathfrak{f}_z$ bilden zugleich die Projectionen der Flächengeschwindigkeit $\mathfrak{f}$ auf die rechtwinkelig zu den Coordinaten-Achsen stehenden Ebenen; es sind daher:

$$6)\quad \Sigma(\mathfrak{f}_x) = F_x, \qquad \Sigma(\mathfrak{f}_y) = F_y, \qquad \Sigma(\mathfrak{f}_z) = F_z$$

die Ausdrücke für die constanten Flächengeschwindigkeitssummen in Bezug auf die drei festen Coordinaten-Ebenen, und nach Einführung der in den letzteren drei Gleichungen angegebenen Bezeichnungsweise nimmt die Gleichung 5) die Form an:

$$7)\quad \Sigma(\mathfrak{f}\cos\varepsilon) = F_x\cos\alpha + F_y\cos\beta + F_z\cos\gamma.$$

Denkt man sich die drei Grössen F_x, F_y, F_z als Längengrössen auf den drei Coordinaten-Achsen abgetragen und ein Parallelepipedon aus denselben construirt, so ergiebt sich für die Diagonale desselben der Werth:

$$8)\quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}.$$

Wenn ferner mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ resp. die Winkel bezeichnet werden, welche diese Diagonale mit den drei Coordinaten-Achsen einschliesst, so ist:

$$9)\quad F\cos\mathfrak{a} = F_x, \qquad F\cos\mathfrak{b} = F_y, \qquad F\cos\mathfrak{c} = F_z$$

zu setzen, und für den Winkel θ, welchen diese Diagonale mit der Achse AO einschliesst, erhält man die Gleichung:

$$10)\quad \cos\theta = \cos\mathfrak{a}\cos\alpha + \cos\mathfrak{b}\cos\beta + \cos\mathfrak{c}\cos\gamma.$$

Nach Substitution der in den Gleichungen 9) angegebenen Werthe nimmt die Gleichung 7) nunmehr die Form an:

$$11)\quad \Sigma(\mathfrak{f}\cos\varepsilon) = F(\cos\mathfrak{a}\cos\alpha + \cos\mathfrak{b}\cos\beta + \cos\mathfrak{c}\cos\gamma),$$

und wenn man hierin für den eingeklammerten Ausdruck auf der rechten Seite den in Gleichung 10) gefundenen Werth substituirt, so erhält man die einfachere Gleichung:

$$12)\quad \Sigma(\mathfrak{f}\cos\varepsilon) = F\cos\theta.$$

Da die Grössen F_x, F_y, F_z während der Bewegung des Systems unverändert bleiben, so sind auch die Grössen F, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ constante Grössen. Es behält also die Diagonale des aus den Grössen F_x, F_y, F_z gebildeten Parallelepipedons beständig dieselbe Grösse und dieselbe Richtung. Die Summe der Flächengeschwindigkeiten in Bezug auf die Projectionsebene E hängt — wie Gleichung 12) zeigt — ab von der Grösse des Winkels θ, welchen die Normale derselben mit jener unveränderlichen Diagonalen-Richtung einschliesst, und erreicht ihren Maximalwerth F, wenn $\theta = 0$ wird. Es ergiebt sich hieraus der folgende Satz: „Wenn in Bezug auf jede durch einen festen Punkt A gelegte Achse die Summe der statischen Momente der auf das System wirkenden Kräfte gleich Null ist, so giebt es für eine durch jenen Punkt gelegte feste Ebene eine unveränderliche Lage, für welche die Summe der Flächengeschwindigkeiten ein Maximum wird, und dieses Maximum bleibt während der Bewegung constant." Dieser Satz wird das Gesetz der unveränderlichen Ebene genannt.

Am Schlusse des vorigen Paragraphen wurde gezeigt, wie man durch Hinzufügung des constanten Factors 2μ den Ausdruck für die Summe der Flächengeschwindigkeiten jederzeit verwandeln kann in den Ausdruck für die Momentensumme der Bewegungsgrössen. Es bleiben daher die sämmtlichen in diesem Paragraphen gefundenen Gleichungen auch dann noch gültig, wenn unter den Ausdrücken F_x, F_y, F_z, F und $\Sigma(\mathfrak{f}\cos\varepsilon)$ statt der betreffenden Flächengeschwindigkeitssummen — die entsprechenden Momentensummen der Bewegungsgrössen verstanden werden. Auch diese Momentensummen kann man daher, indem man dieselben als Längengrössen auf den betreffenden Achsenrichtungen abträgt, gerade so wie Kräfte, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und

Drehgeschwindigkeiten nach dem Parallelogrammgesetze zu einer Resultirenden zusammensetzen.

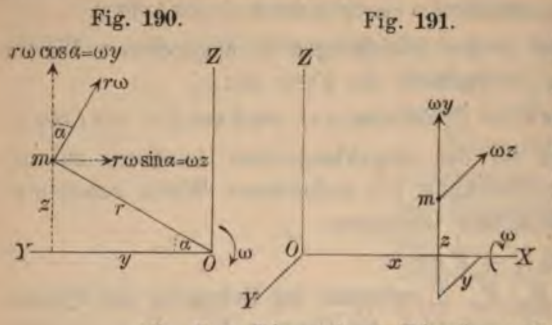


Fig. 190. Fig. 191.

Bei einem Körper, welcher mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse OX sich dreht, würden z. B. für die Momentensummen der Bewegungsgrössen in Bezug auf die drei Coordinaten-Achsen nach Fig. 190 und Fig. 191 die folgenden Ausdrücke sich ergeben:

$$13)\quad F_x = \Sigma(m r \omega r) = \omega\,\Sigma(m r^2) = \omega\, T_x.$$
$$14)\quad F_y = -\,\Sigma(m\omega y x) = -\,\omega\,\Sigma(m y x).$$
$$15)\quad F_z = -\,\Sigma(m\omega z x) = -\,\omega\,\Sigma(m z x).$$

Zwischen der Grösse F und ihren drei Componenten F_x, F_y, F_z finden genau dieselben Beziehungen statt, wie zwischen der Mittelkraft und ihren drei rechtwinkelig zu einander gerichteten Seitenkräften. Man würde daher nunmehr die Gleichungen 8) und 9) benutzen können, um die Resultirende F ihrer Grösse und Richtung nach zu bestimmen, womit dann zugleich die Lage der unveränderlichen Ebene, sowie das Maximum der Momentensummen der Bewegungsgrössen gefunden sein würde.

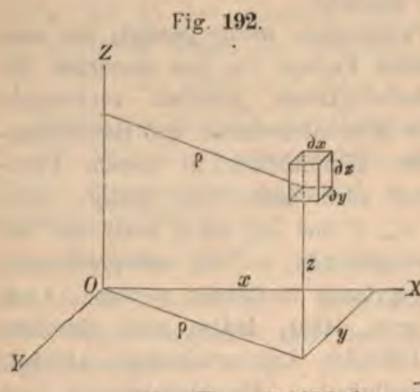
§ 100.

Berechnung der Trägheitsmomente.

(Parallelepipedon. Ellipsoid. Cylinder. Kegel. Paraboloid. Geradlinige Stange.)

Um das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine feste Drehachse zu berechnen, hat man jedes seiner unendlich kleinen Massentheilchen dM zu multipliciren mit dem Quadrate seines Abstandes ρ von der Drehachse und die Summe aller dieser Producte zu bilden. Nach Fig. 192 würde man also für das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Achse OZ die Gleichung erhalten:

Fig. 192.



$$1)\quad T_z = \Sigma(dM\rho^2) = \Sigma\,\{dM(x^2+y^2)\}.$$

Das Massentheilchen dM kann man sich von der Form eines Parallelepipedons denken, dessen unendlich kleine Kanten dx, dy, dz sind. Wenn also mit γ die in jeder Kubikeinheit dieses Parallelepipedons enthaltene Masse (oder die Dichtigkeit des Körpers an dieser Stelle) bezeichnet wird, so ist $dM = \gamma\, dx\, dy\, dz$ zu setzen, und man erhält für das Trägheitsmoment das dreifache Integral:

$$2)\quad T_z = \iiint \gamma\, dx\, dy\, dz\, (x^2 + y^2).$$

Im Allgemeinen wird die Dichtigkeit an den verschiedenen Stellen des Körpers verschiedene Werthe haben, und für γ ein Ausdruck von der Form $\gamma = f(x, y, z)$ zu substituiren sein. Wenn jedoch — wie hier vorausgesetzt werden soll — der Körper homogen ist, so kann man den Factor γ als constante Grösse auch vor die Integralzeichen setzen, und es wird:

$$3)\quad T_z = \gamma \iiint dx\, dy\, dz\, (x^2 + y^2).$$

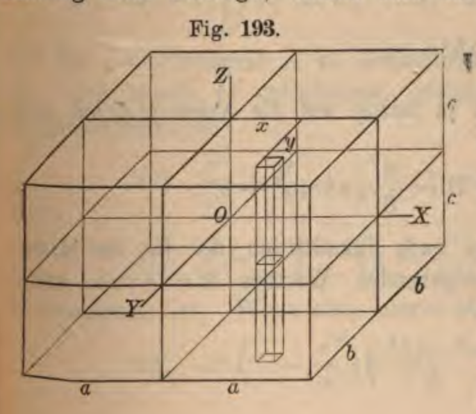
Trägheitsmoment des Parallelepipedons.

Die erste der oben angedeuteten drei Integrationen, nämlich die Integration nach z kann man unmittelbar ausführen, indem man der obigen Gleichung die Form giebt:

$$4)\quad T_z = \gamma \iint dx\, dy\, (x^2 + y^2) \int_{-c}^{+c} dz.$$

Die Ausführung dieser Integration ist gleichbedeutend mit der Summirung aller Beiträge, welche eine der Achse OZ parallele Säule vom unendlich kleinen Querschnitte $dx\, dy$ zu dem ganzen Trägheitsmomente liefert (Fig. **193**), und dieselbe führt zu der Gleichung:

Fig. **193**.



$$5)\quad T_z = \gamma \iint dx\, dy (x^2 + y^2) \cdot 2c.$$

Man hätte daher diese erste Integration auch dadurch umgehen können, dass man von vornherein für das Massentheilchen dM die in jener

Säule enthaltene Masse $2c\,dx\,dy\,\gamma$ in Gleichung 1) substituirt hätte. Das ganze Trägheitsmoment setzt sich also zusammen aus den beiden Theilen:

$$6)\quad A = 2c\gamma \iint x^2\,dx\,dy, \qquad 7)\quad B = 2c\gamma \iint y^2\,dx\,dy.$$

Um zunächst das Doppelintegral A zu bestimmen, hat man demselben die Form zu geben:

$$8)\quad A = 2c\gamma \int x^2\,dx \int_{-b}^{+b} dy.$$

Die hier angedeutete Integration nach y ist gleichbedeutend mit der Summation aller Beiträge, welche eine der Ebene OYZ parallele Schicht von der Dicke dx zu dem Theile A liefert, und durch Ausführung dieser Integration erhält man die Gleichung:

$$9)\quad A = 2c\gamma \int x^2\,dx\,.\,2b.$$

Die nunmehr noch auszuführende Integration nach x ist gleichbedeutend mit der Summation der Beiträge, welche die sämmtlichen der Ebene OYZ parallelen Schichten zu der Grösse A liefern, und führt zu der Gleichung:

$$10)\quad A = 4bc\gamma \int_{-a}^{+a} x^2\,dx \quad \text{oder:} \quad 11)\quad A = \frac{8}{3}\gamma a^3 bc.$$

Durch Vertauschung der Buchstaben a und b erhält man für den anderen Theil B den Werth:

$$12)\quad B = \frac{8}{3}\gamma a b^3 c.$$

Das ganze Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse OZ hat also die Grösse:

$$13)\quad T_z = A + B = \frac{8}{3}\gamma abc(a^2 + b^2).$$

Dieser Gleichung kann man nach Substitution des für die Masse des Parallelepipedons sich ergebenden Werthes $M = 8\gamma abc$ auch die Form geben:

$$14)\quad T_z = M\left(\frac{a^2 + b^2}{3}\right).$$

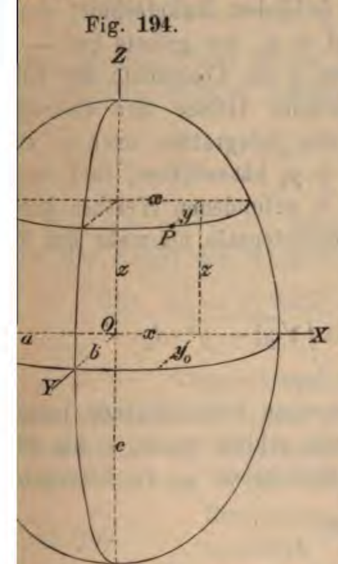
iche Weise würde man für die Trägheitsmomente in Bezug anderen beiden Coordinaten-Achsen die Werthe finden:

$$15)\quad T_y = M\left(\frac{a^2+c^2}{3}\right), \qquad 16)\quad T_z = M\left(\frac{b^2+c^2}{3}\right).$$

Trägheitsmoment des Ellipsoids.

ie bei dem vorigen Beispiele schon erklärt wurde, kann e erste von den drei in Gleichung 3) angedeuteten Integrationen dadurch umgehen, dass man schon in Gleichung 1) für dM die Masse substituirt, welche in einer der Achse OZ parallelen Säule vom Querschnitte $dx\,dy$ enthalten ist (Fig. **194**). Für die Länge dieser Säule ist im vorliegenden Falle $2z$ zu setzen, während dieselbe bei dem vorigen Falle gleich $2c$ war. Man erhält demnach aus Gleichung 5) durch Vertauschung des Buchstaben c mit dem Buchstaben z den Ausdruck:

Fig. 194.



$$17)\quad T_z = 2\gamma \iint z(x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

welcher wie bei dem vorigen die beiden Theile zerlegt werden kann:

$$8)\quad A = 2\gamma \iint z x^2\,dx\,dy, \qquad 19)\quad B = 2\gamma \iint z y^2\,dx\,dy.$$

s Doppelintegral A zu bestimmen, hat man darin zunächst len Werth zu substituiren, welcher aus der Gleichung der d-Oberfläche

$$20)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{oder:}$$

$$21)\quad z = \frac{c}{b}\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) - y^2}$$

ehmen ist. Wenn man hierin abkürzungsweise die Grösse:

$$22)\quad b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right) = y_0^2$$

setzt, so nimmt der obige Ausdruck für die Coordinate z die Form an:

$$23)\quad z = \frac{c}{b}\sqrt{y_0^2 - y^2}.$$

Die hier mit y_0 bezeichnete Grösse ist derjenige Werth, welchen in Gleichung 20) die Coordinate y annimmt, wenn darin $z = 0$ gesetzt wird. Es kann daher die Grösse y_0 als die zu der Abscisse x gehörende Ordinate derjenigen Ellipse betrachtet werden, welche den in die Ebene OXY fallenden Hauptschnitt der Ellipsoid-Oberfläche bildet. Folglich ist $+y_0$ der grösste und $-y_0$ der kleinste Werth, welchen die Grösse y als Coordinate der Ellipsoid-Oberfläche bei unverändert bleibender Grösse der Coordinate x annehmen kann. Es ist daher die Integration nach y zwischen den Grenzen $y = -y_0$ und $y = +y_0$ auszuführen, und nach Substitution des in Gleichung 23) für z gefundenen Werthes kann man dem oben mit A bezeichneten Doppelintegrale nunmehr die folgende Form geben:

$$24)\quad A = 2\gamma\frac{c}{b}\int x^2\,dx\int_{-y_0}^{+y_0}\sqrt{y_0^2 - y^2}\cdot dy.$$

Das den letzten Factor auf der rechten Seite bildende Integral ist — wie in Bezug auf Fig. 153 bereits erklärt wurde — als Flächeninhalt einer Halbkreisfläche vom Halbmesser y_0 zu betrachten und gleich $\frac{y_0^2\pi}{2}$ zu setzen. Folglich ist:

$$25)\quad A = \gamma\pi\frac{c}{b}\int y_0^2 x^2\,dx.$$

Wenn man hierin für y_0^2 den aus Gleichung 22) zu entnehmenden Werth substituirt, und alsdann die Integration nach x ausführt, so erhält man die Gleichung:

$$26)\quad A = \gamma\pi bc\int_{-a}^{+a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)x^2\,dx,\quad \text{oder:}$$

$$27)\quad A = \gamma\pi bc\left(\frac{2}{3}a^3 - \frac{2}{5}a^3\right) = \frac{4}{15}\gamma\pi a^3 bc.$$

Durch Vertauschung der Buchstaben a und b erhält man für den anderen Theil B den Ausdruck:

$$28)\quad B = \frac{4}{15}\gamma\pi a b^3 c.$$

ganze Trägheitsmoment des Ellipsoids in Bezug auf die Achse hat also die Grösse:

$$29)\quad T_z = \frac{4}{15}\gamma\pi abc\,(a^2+b^2).$$

n Substitution des (nach § 81) für die ganze Masse des Ellip- s sich ergebenden Werthes $\frac{4}{3}\gamma\pi abc = M$ nimmt dieser Aus- k die einfachere Form an:

$$30)\quad T_z = M\left(\frac{a^2+b^2}{5}\right).$$

Auf gleiche Weise würde man für die Trägheitsmomente in ıg auf die anderen beiden Coordinaten-Achsen die Werthe ən:

$$31)\quad T_y = M\left(\frac{a^2+c^2}{5}\right),\quad 32)\quad T_x = M\left(\frac{b^2+c^2}{5}\right).$$

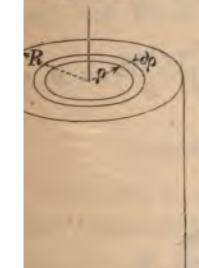
ın man $a=b=c=r$ setzt, so erhält man für das Trägheits- ıent der Kugel den Ausdruck:

$$33)\quad T_x = T_y = T_z = \frac{2}{5}Mr^2.$$

Trägheitsmoment des Cylinders.

Die sämmtlichen einem Hohlcylinder vom Halbmesser ρ und Wandstärke $d\rho$ angehörenden materiellen Punkte haben den tand ρ von der Achse desselben. Man kann daher bei der Bestimmung des Trägheitsmoments eines aus unendlich vielen Hohlcylindern zusammengesetzten Vollcylinders die ersten zwei Integrationen dadurch umgehen, dass man in Gleichung 1) für dM die Masse substituirt, welche in einem solchen Hohlcylinder enthalten ist. Nach Fig. 195 ist also:

Fig. 195.



$$34)\quad dM = 2\rho\pi\,d\rho\,h\gamma$$

zu setzen, und man erhält für das Trägheitsmoment des ganzen Cylinders in Bezug auf seine Achse die Gleichung:

$$T = \int 2\rho\pi\,d\rho\,h\gamma\rho^2 = 2\pi\gamma h\int_0^R \rho^3 d\rho, \text{ oder:}$$

$$35)\quad T = \gamma\frac{\pi}{2}R^4 h,$$

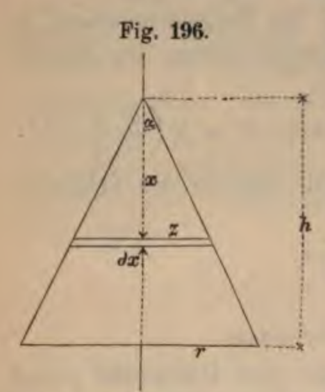
wofür man nach Substitution des Werthes für die Masse des Cylinders auch setzen kann:

$$36)\quad T = \frac{MR^2}{2}.$$

Trägheitsmoment des Kegels.

Man kann sich den Kegel durch rechtwinkelig zur Achse hindurchgelegte Ebenen in unendlich dünne Scheiben zerlegt denken, und erhält für den Beitrag, welchen die im Abstande x von der Spitze befindliche Scheibe von der Dicke dx und dem Halbmesser z zu dem Trägheitsmomente des ganzen Kegels liefert, nach Gleichung 35) den Ausdruck:

Fig. 196.



$$37)\quad dT = \gamma \frac{\pi}{2} z^4 dx,$$

welcher nach Substitution des aus Fig. 196 für z sich ergebenden Werthes die Form annimmt:

$$38)\quad dT = \gamma \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \alpha^4 x^4 dx.$$

Das Trägheitsmoment des ganzen Kegels in Bezug auf seine Achse hat also die Grösse:

$$39)\quad T = \gamma \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \alpha^4 \int_0^h x^4 dx = \gamma \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \alpha^4 \frac{h^5}{5}.$$

Wenn man in dieser Gleichung $h \operatorname{tg} \alpha = r$ und $\frac{\gamma r^2 \pi h}{3} = M$ setzt setzt, so nimmt dieselbe die Form an:

$$40)\quad T = \frac{3}{10} M r^2.$$

Trägheitsmoment des Paraboloids.

Das Trägheitsmoment des in Fig. 197 dargestellten Rotations-Paraboloids kann auf dieselbe Weise wie das des Kegels berechnet werden. Der Beitrag, welchen die im Abstande x vom Scheitelpunkte befindliche Scheibe zu dem ganzen Trägheitsmomente liefert, ist wieder nach Gleichung 37) zu bestimmen, in welcher alsdann für z der im vorliegenden Falle aus der Gleichung der Parabel:

41) $z^2 = px$

1 entnehmende Werth zu substituiren ist. Man erhält also für as ganze Trägheitsmoment die Gleichung:

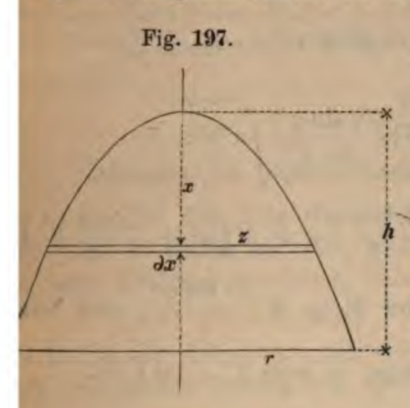


Fig. 197.

$$T = \int \gamma \frac{\pi}{2} p^2 x^2 dx = \gamma \frac{\pi}{2} p^2 \int_0^h x^2 \, dx,$$

oder:

42) $T = \gamma \frac{\pi}{6} p^2 h^3,$

welcher man mit Benutzung des aus Gleichung 41) sich ergebenden Werthes $r^2 = ph$ auch die Form geben kann:

43) $T = \gamma \frac{\pi}{6} r^4 h.$

'ür die Masse des ganzen Paraboloids erhält man durch Summation er in den einzelnen Scheiben enthaltenen Massen die Gleichung:

$$M = \int \gamma z^2 \pi dx = \gamma \pi p \int_0^h x dx = \gamma \frac{\pi}{2} ph^2, \text{ oder:}$$

44) $M = \gamma \frac{\pi}{2} r^2 h.$

'ür das Verhältniss des Trägheitsmoments zur Masse ergiebt sich iernach der Werth:

45) $\frac{T}{M} = \frac{r^2}{3}$; folglich ist: $T = \frac{Mr^2}{3}$.

Trägheitsmoment der geradlinigen Stange.

Wenn mit L die ganze Länge der Stange AB, und mit γ die 1 jeder Längeneinheit derselben enthaltene Masse bezeichnet wird,) ist $\gamma L = M$ die ganze Masse der Stange und $\gamma ds = dM$ die 1 dem Längenelemente ds enthaltene Masse. Für das Trägheitsioment der Stange in Bezug auf die Achse OX erhält man nach 'ig. 198 die Gleichung:

$$T_x = \int dM \, . \, \rho^2 = \int \gamma ds \, (y^2 + z^2).$$

'urch Substitution der aus Fig. 198 zu entnehmenden Werthe

$ds = \frac{dx}{\cos\varphi}$, $y = a$, $z = x \operatorname{tg} \varphi$, und nachherige Ausführung der Integration gelangt man alsdann zu den folgenden Gleichungen:

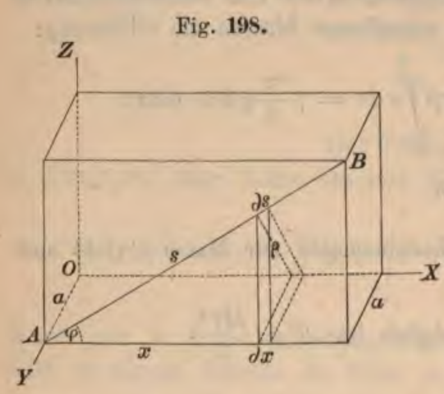
$$T_x = \int \frac{\gamma dx}{\cos\varphi} (a^2 + x^2 \operatorname{tg} \varphi^2),$$

$$T_x = \frac{\gamma a^2}{\cos\varphi} \int_0^{L\cos\varphi} dx + \frac{\gamma \sin\varphi^2}{\cos\varphi^3} \int_0^{L\cos\varphi} x^2 dx,$$

$$45)\quad T_x = \gamma L a^2 + \frac{\gamma L^3 \sin\varphi^2}{3} = M\left(a^2 + \frac{L^2 \sin\varphi^2}{3}\right).$$

Wenn man $a = 0$ setzt, so wird $T_x = M\frac{L^2 \sin\varphi^2}{3}$, und wenn man ein anderes Mal $\sin\varphi = 1$ setzt, so wird $T_x = M\left(a^2 + \frac{L^2}{3}\right)$. Es sind also die Fälle, in welchen die Richtungslinie der Stange die Drehachse schneidet oder auch rechtwinkelig zu derselben gerichtet ist, in der obigen allgemeinen Gleichung als specielle Fälle enthalten. Da die Richtungslinie der Stange die Achse OY rechtwinkelig schneidet, so ist das Trägheitsmoment in Bezug auf diese Achse:

Fig. 198.



$$46)\quad T_y = \frac{ML^2}{3}.$$

Man erhält ferner aus Gleichung 45) durch Vertauschung der Grösse $\sin\varphi$ mit der Grösse $\cos\varphi$ für das Trägheitsmoment der Stange in Bezug auf die Achse OZ den Werth:

$$47)\quad T_z = M\left(a^2 + \frac{L^2 \cos\varphi^2}{3}\right).$$

Während das Trägheitsmoment des physikalischen Körpers zu definiren ist als Summe der Producte aus den Massenelementen in die Quadrate ihrer Abstände von der Drehachse, ist das Trägheitsmoment eines geometrischen Körpers (resp. einer Fläche oder Linie) zu definiren als Summe der Producte aus den Raum-

Elementen (resp. Flächen- oder Linien-Elementen) in die Quadrate ihrer Abstände von der Drehachse. Es ist daher nur erforderlich: in den oben für die Trägheitsmomente der Massen gefundenen Ausdrücken überall den Factor γ fortzulassen, um die Ausdrücke für die Trägheitsmomente der entsprechenden geometrischen Gebilde zu erhalten.

§ 101.

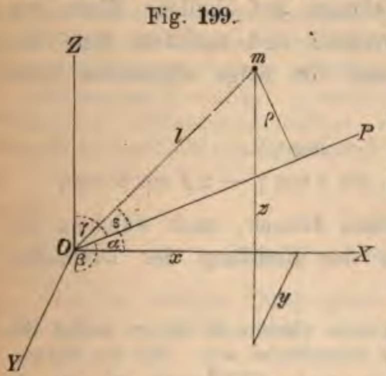
Abhängigkeit des Trägheitsmoments von der Richtung der Drehachse.

Um für das Trägheitsmoment eines Systems von materiellen Punkten in Bezug auf eine beliebige Drehachse OP einen allgemeinen Ausdruck abzuleiten, hat man in der Gleichung:

1) $T = \Sigma (m\rho^2)$

zunächst die Grösse ρ^2, als Quadrat des Abstandes irgend eines der materiellen Punkte von der Drehachse näher zu bestimmen.

Fig. 199.



Aus Fig. **199** ergiebt sich für diese Grösse die Gleichung:

$$\rho^2 = l^2 - (l \cos \varepsilon)^2,$$

in welcher die Grössen l und $\cos \varepsilon$ zu bestimmen sind aus den Gleichungen:

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\cos \varepsilon = \frac{x}{l} \cos \alpha + \frac{y}{l} \cos \beta + \frac{z}{l} \cos \gamma.$$

Nach Substitution der aus diesen Gleichungen zu entnehmenden Werthe nimmt der obige Ausdruck für ρ^2 die Form an:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2, \quad \text{oder:}$$

$$\rho^2 = x^2 (1 - \cos \alpha^2) + y^2 (1 - \cos \beta^2 + z^2 (1 - \cos \gamma^2)$$
$$- 2xy \cos \alpha \cos \beta - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2yz \cos \beta \cos \gamma.$$

Wenn man in dieser letzteren Gleichung abkürzungsweise die Summe der ersten drei Glieder mit U bezeichnet, so kann man mit Benutzung der Bedingungsgleichung:

$$\cos \alpha^2 + \cos \beta^2 + \cos \gamma^2 = 1$$

jenem mit U bezeichneten Ausdrucke auch die folgenden Formen geben:

$$U = x^2 (\cos \beta^2 + \cos \gamma^2) + y^2 (\cos \alpha^2 + \cos \gamma^2) + z^2 (\cos \alpha^2 + \cos \beta^2),$$
$$U = (y^2 + z^2) \cos \alpha^2 + (x^2 + z^2) \cos \beta^2 + (x^2 + y^2) \cos \gamma^2.$$

Indem man für ρ^2 den aus der Substitution dieses letzteren Ausdrucks sich ergebenden Werth in die Gleichung für T einsetzt, erhält man dann für das Trägheitsmoment die folgende allgemeine Gleichung:

$$2)\quad T = \cos\alpha^2 \Sigma\{m(y^2+z^2)\} + \cos\beta^2 \Sigma\{m(x^2+z^2)\} + \cos\gamma^2 \Sigma\{m(x^2+y^2)\} \\ -2\cos\alpha\cos\beta\,\Sigma(mxy) - 2\cos\alpha\cos\gamma\,\Sigma(mxz) - 2\cos\beta\cos\gamma\,\Sigma(myz).$$

Aus dieser Gleichung würde man für jede beliebige Lage der Drehachse OP das Trägheitsmoment in Bezug auf dieselbe berechnen können, sobald die Coefficienten:

$$\Sigma\{m(y^2+z^2)\} = A,\quad \Sigma\{m(x^2+z^2)\} = B,\quad \Sigma\{m(x^2+y^2)\} = C, \\ \Sigma(mxy) = D,\quad \Sigma(mxz) = E,\quad \Sigma(myz) = F,$$

welche auf die drei festen Coordinaten-Achsen sich beziehen, vorher gefunden sind. Die drei Coefficienten A, B, C sind die Trägheitsmomente in Bezug auf die drei festen Coordinaten-Achsen. Die drei Coefficienten D, E, F können auf ähnliche Weise wie die Trägheitsmomente berechnet werden; und nachdem diese Berechnung ausgeführt ist, würde man die obige allgemeine Gleichung für T in der Form:

$$3)\quad T = A\cos\alpha^2 + B\cos\beta^2 + C\cos\gamma^2 \\ -2D\cos\alpha\cos\beta - 2E\cos\alpha\cos\gamma - 2F\cos\beta\cos\gamma$$

als Darstellung des Gesetzes benutzen können, nach welchem die Grösse des Trägheitsmomentes in der Richtung der Drehachse sich ändert.

Die Bestimmung jener sechs Coefficienten würde z. B. bei der in Fig. 198 dargestellten Stange auf folgende Weise auszuführen sein. Für die ersteren drei Coefficienten ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen 45), 46), 47) des vorigen Paragraphen die Werthe:

$$A = M\left(a^2 + \frac{L^2\sin\varphi^2}{3}\right),\quad B = \frac{ML^2}{3},\quad C = M\left(a^2 + \frac{L^2\cos\varphi^2}{3}\right).$$

Bei der Berechnung der letzteren drei Coefficienten würde man zu den folgenden Gleichungen gelangen:

$$D = \Sigma(mxy) = \int\frac{\gamma\,dx}{\cos\varphi}\,ax = \frac{\gamma a}{\cos\varphi}\int_0^{L\cos\varphi} x\,dx = \frac{\gamma a}{\cos\varphi}\,\frac{L^2\cos\varphi^2}{2} = \frac{MaL\cos\varphi}{2},$$

$$E = \Sigma(mxz) = \int\frac{\gamma\,dx}{\cos\varphi}\,x x\,\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\gamma\sin\varphi}{\cos\varphi^2}\int_0^{L\cos\varphi} x^2 dx = \frac{\gamma\sin\varphi}{\cos\varphi^2}\,\frac{L^3\cos\varphi^3}{3} \\ = \frac{ML^2\sin\varphi\cos\varphi}{3},$$

$$F = \Sigma(myz) = \int \frac{\gamma dx}{\cos\varphi} ax \operatorname{tg}\varphi = \frac{\gamma a \sin\varphi}{\cos\varphi^2} \int_0^{L\cos\varphi} x dx = \frac{\gamma a \sin\varphi}{\cos\varphi^2} \frac{L^2 \cos\varphi^2}{2}$$

$$= \frac{MaL\sin\varphi}{2}.$$

Die auf solche Weise berechneten sechs Coefficienten würde man auch benutzen können, um die Ausdrücke für die Momentensummen der Bewegungsgrössen in Bezug auf die drei festen Coordinaten-Achsen zu bestimmen. Wenn z. B. die in Fig. 198 dargestellte Stange mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse OX sich drehte, so würden aus den am Schlusse des § 99 gefundenen Gleichungen für diese drei Momentensummen die folgenden Werthe sich ergeben:

$$F_x = \omega M\left(a^2 + \frac{L^2 \sin\varphi^2}{3}\right), \qquad F_y = -\omega \cdot \frac{MaL\cos\varphi}{2},$$

$$F_z = -\omega \cdot \frac{ML^2 \sin\varphi\cos\varphi}{3}.$$

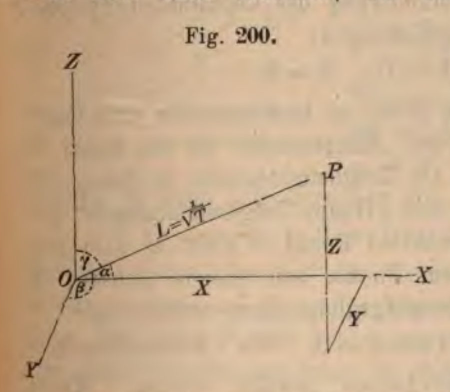
Auf analoge Weise würde man für den Fall, in welchem die Stange eine Drehbewegung um die Achse OY oder um die Achse OZ ausführt, die Werthe für jene drei Momentensummen berechnen können. Mit Benutzung des am Schlusse des § 99 gefundenen Satzes würde man dann auch im Stande sein, die Werthe dieser drei Momentensummen zu bestimmen für den Fall, in welchem jene drei Drehbewegungen gleichzeitig stattfinden, d. h für den Fall, in welchem die Stange eine Drehbewegung ausführt, welche als Resultirende aus jenen drei Drehbewegungen sich zusammensetzt.

§ 102.

Ellipsoid der Trägheitsmomente.

Die im vorigen Paragraphen gefundene allgemeine Gleichung kann man auch benutzen, um das Gesetz, nach welchem die Grösse T mit der Richtung der Drehachse sich ändert, geometrisch darzustellen. Zu diesem Zwecke hat man entweder die Grösse T selbst oder auch irgend eine beliebig gewählte Function von T auf der jedesmaligen Richtung der Drehachse von dem Punkte O aus als Längengrösse abzutragen. Die Endpunkte aller dieser Linien werden dann um den Punkt O herum eine krumme Fläche bilden, deren Form jenes Gesetz veranschaulicht. Am zweckmässigsten erweist es sich, für

Fig. 200.



jene Function von T den Ausdruck:

$$1)\quad L = \frac{1}{\sqrt{T}}$$

zu wählen. Wenn man diese Längengrösse auf der Drehachse von dem Punkte O aus abträgt, so erhält man nach Fig. **200** für die Coordinaten des Endpunktes P die Werthe:

$$X = L\cos\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{T}},\quad Y = L\cos\beta = \frac{\cos\beta}{\sqrt{T}},\quad Z = L\cos\gamma = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{T}},$$

und für die drei Winkel α, β, γ ergeben sich hiernach die Gleichungen:

$$\cos\alpha = X\sqrt{T},\quad \cos\beta = Y\sqrt{T},\quad \cos\gamma = Z\sqrt{T}.$$

Nach Substitution dieser Werthe nimmt die im vorigen Paragraphen gefundene Gleichung 3) bei Weglassung des allen Gliedern gemeinschaftlichen Factors T die Form an:

$$2)\quad 1 = AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DXY - 2EXZ - FYZ.$$

Man erkennt an der Form dieser Gleichung, dass jene krumme Fläche die Oberfläche eines Ellipsoids ist, dessen Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte des Coordinaten-Systems zusammenfällt. Die Gleichung einer Ellipsoid-Oberfläche kann man stets auf die einfachere Form:

$$3)\quad 1 = AX^2 + BY^2 + CZ^2$$

bringen dadurch, dass man die drei Achsen des Ellipsoids als Coordinaten-Achsen wählt. Es folgt hieraus, dass man unter allen Umständen durch eine Lagenveränderung des Coordinaten-Systems das Erfülltsein der Bedingungsgleichungen:

$$D = 0,\quad E = 0,\quad F = 0$$

bewirken kann. Die auf solche Weise zu bestimmenden drei Coordinaten-Achsen nennt man die drei „Hauptachsen" für den Punkt O, und die drei Grössen A, B, C als Trägheitsmomente in Bezug auf diese Hauptachsen werden die drei „Haupt-Trägheitsmomente" genannt. Für jeden beliebig gewählten Punkt O giebt es also drei einander rechtwinkelig in diesem Punkte schneidende Achsen, in Bezug auf welche die drei Bedingungsgleichungen erfüllt sind:

$$4)\quad \Sigma(mxy) = 0,\qquad 5)\quad \Sigma(mxz) = 0,\qquad 6)\quad \Sigma(myz) = 0,$$

wenn dieselben als Coordinaten-Achsen gewählt werden. Kennt man die Lagen dieser drei Hauptachsen und die Grössen der drei Haupt-Trägheitsmomente A, B, C, so kann man das Trägheits-

moment in Bezug auf eine beliebige andere durch den Punkt O gelegte Achse, welche die Winkel α, β, γ mit jenen drei Hauptachsen einschliesst, nunmehr berechnen nach der einfacheren Gleichung:

$$7)\quad T = A\cos\alpha^2 + B\cos\beta^2 + C\cos\gamma^2.$$

Die Achse OX ist eine Hauptsache, wenn die beiden Bedingungsgleichungen erfüllt sind:

$$\Sigma(mxy) = 0, \qquad \Sigma(mxz) = 0.$$

Die Gleichungen 14) und 15) des § 99 nehmen für diesen Fall die Formen an:

$$F_y = 0, \qquad F_z = 0.$$

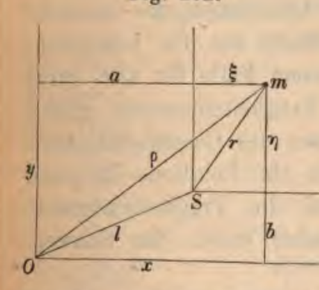
Wenn also bei dem in Fig. **190** und Fig. **191** dargestellten Falle die Drehachse OX eine Hauptachse wäre, so würde diese Drehachse selbst diejenige Achse sein, in Bezug auf welche die Momentensumme der Bewegungsgrössen ein Maximum wird, und nach Gleichung 13) des § 99 ist dieses Maximum gleich dem Producte aus der Winkelgeschwindigkeit in das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf diese Achse.

§ 103.

Central-Ellipsoid.

Nach Fig. **201** ist das Trägheitsmoment in Bezug auf die rechtwinkelig zur Bildfläche stehende Schwerpunktsachse S zu bestimmen aus der Gleichung:

Fig. **201.**



$$T_s = \Sigma(mr^2) = \Sigma\{m(\xi^2 + \eta^2)\},$$

und das Trägheitsmoment in Bezug auf eine jener Schwerpunktsachse parallele Achse O hat die Grösse:

$$T_0 = \Sigma(m\rho^2) = \Sigma\{m(x^2 + y^2)\}, \text{ oder:}$$
$$T_0 = \Sigma\{m[(a+\xi)^2 + (b+\eta)^2]\}.$$

Wenn man in dieser letzteren Gleichung die aus der Figur sich ergebenden Werthe $a^2 + b^2 = l^2$ und $\xi^2 + \eta^2 = r^2$ substituirt, so kann man derselben die Form geben:

$$T_0 = \Sigma(ml^2) + \Sigma(mr^2) + 2a\Sigma(m\xi) + 2b\Sigma(m\eta).$$

Für das erste Glied auf der rechten Seite kann man auch Ml^2 setzen, indem man die ganze Masse mit M bezeichnet; das zweite Glied ist gleich T_s; die beiden letzten Glieder sind nach der Lehre vom Schwerpunkte ein jedes für sich gleich Null. Folglich ist:

$$T_0 = T_s + Ml^2.$$

„Man erhält also das Trägheitsmoment in Bezug auf eine beliebige

Achse O, indem man zu dem Trägheitsmomente in Bezug auf die parallele Schwerpunktsachse noch das Product aus der Masse des ganzen Körpers in das Quadrat des Abstandes beider Achsen hinzu addirt."

Das Ellipsoid der Trägheitsmomente für den Schwerpunkt eines Körpers (oder eines beliebigen Systems von materiellen Punkten) wird das „Central-Ellipsoid" genannt. Da das Trägheitsmoment für jede Schwerpunktsachse durch den in diese Achsenrichtung fallenden Radiusvector der Central-Ellipsoidfläche gegeben ist, so kann man für jeden beliebigen ausserhalb des Schwerpunktes liegenden Punkt das Trägheitsmoment in Bezug auf eine beliebige durch diesen Punkt gelegte Achse nach obiger Gleichung leicht bestimmen, sobald das Central-Ellipsoid für den Körper gegeben ist.

Der grössten von den drei Achsen des Central-Ellipsoids entspricht das kleinste der drei Haupt-Trägheitsmomente für den Schwerpunkt. Da das Trägheitsmoment in Bezug auf eine ausserhalb des Schwerpunktes liegende Achse immer grösser ist als das Trägheitsmoment in Bezug auf die parallele Schwerpunktsachse, so ist jenes kleinste Haupt-Trägheitsmoment in Bezug auf den Schwerpunkt zugleich das kleinste von allen Trägheitsmomenten überhaupt. Das Central-Ellipsoid geht in eine Kugel über, wenn für den Schwerpunkt die drei Haupt-Trägheitsmomente einander gleich sind. Der Radiusvector der Kugelfläche hat für jede Richtung dieselbe Grösse; folglich sind in diesem Falle für alle durch den Schwerpunkt gelegten Achsen die Trägheitsmomente gleich gross. Wenn nur zwei von den drei Achsen des Central-Ellipsoids gleich gross sind, so kann dasselbe als ein Rotations-Ellipsoid betrachtet werden. In diesem Falle sind die Trägheitsmomente für alle rechtwinkelig zu der Rotationsachse durch den Schwerpunkt gelegten Achsen gleich gross.

Bei einem Körper, welcher so beschaffen ist, dass derselbe durch jede von drei im Schwerpunkte einander rechtwinkelig schneidenden Ebenen gleichzeitig in zwei symmetrische Hälften sich zerlegen lässt — wie z. B. bei dem in Fig. 193 dargestellten homogenen Parallelepipedon — sind die Bedingungsgleichungen 4), 5), 6) des vorigen Paragraphen — wie man sich leicht überzeugen kann — stets erfüllt, wenn jene drei Symmetrie-Ebenen selbst als Coordinaten-Ebenen gewählt werden. Es fallen daher die drei Achsen des Central-Ellipsoids in solchem Falle mit den drei Coordinaten-Achsen zusammen, und bei jenem Parallelepipedon z. B. ergeben sich für die drei Haupt-Trägheitsmomente in Bezug auf den Schwerpunkt aus den Gleichungen 14), 15), 16) des § 100 die Werthe:

$$A = M\left(\frac{b^2 + c^2}{3}\right), \quad B = M\left(\frac{a^2 + c^2}{3}\right), \quad C = M\left(\frac{a^2 + b^2}{3}\right).$$

Die drei Halbachsen des Central-Ellipsoids für dieses Parallelepipedon sind also:

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{\sqrt{A}}, \quad \mathfrak{b} = \frac{1}{\sqrt{B}}, \quad \mathfrak{c} = \frac{1}{\sqrt{C}}, \text{ oder:}$$

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}M(b^2+c^2)}}, \quad \mathfrak{b} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}M(a^2+c^2)}}, \quad \mathfrak{c} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}M(a^2+b^2)}}.$$

Wenn $a = b = c$ ist, so wird $A = B = C$, folglich auch $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$. Für einen Würfel nimmt also das Central-Ellipsoid die Form einer Kugel an; folglich sind die Trägheitsmomente des Würfels für alle durch den Mittelpunkt desselben gelegten Achsen gleich gross.

Nach der am Schlusse des § 100 gegebenen Erklärung können die hier für das Trägheitsmoment einer Masse gefundenen Sätze ohne Weiteres auch auf die Trägheitsmomente von geometrischen Gebilden übertragen werden.

§ 104.

Ableitung der drei Euler'schen Gleichungen für die Drehung eines festen Körpers um einen festen Drehpunkt.

Die drei rechtwinkelig zu einander gerichteten Hauptachsen des Körpers in Bezug auf den festen Drehpunkt O bilden ein bewegliches Coordinaten-System, welches mit dem Körper um diesen Punkt sich dreht. Der in § 98 (Gleichung 5) gefundene Satz von den Momentensummen der Bewegungsgrössen dagegen bezieht sich auf eine feste Achse. Um also jenen Satz auf den vorliegenden Fall anwenden zu können und gleichzeitig die Vortheile benutzen zu können, welche die Wahl der Hauptachsen als Coordinaten-Achsen für die Bestimmung des Trägheitsmomentes bietet, hat man das feste Coordinaten-System so zu legen, dass dessen drei Achsen OX, OY, OZ resp. zusammenfallen mit den Lagen OA, OB, OC, welche die drei beweglichen Hauptachsen in einem bestimmten Zeitpunkte, nämlich dem Anfangspunkte des Zeitelements dt, gerade erreicht haben (Fig. 202).

Fig. 202.



Wenn ω die Drehgeschwindigkeit ist, mit welcher in diesem Zeitpunkte der Körper um seine augenblickliche Drehachse sich dreht, und wenn α, β, γ die Winkel sind, welche diese augenblickliche Drehachse mit den drei Hauptachsen einschliesst, so sind (nach § 18):

$$\omega \cos \alpha = p, \quad \omega \operatorname{sos} \beta = q, \quad \omega \cos \gamma = r$$

die Drehgeschwindigkeiten um die drei Hauptachsen. Nach der am Schlusse des § 102 gegebenen Erklärung sind also in diesem Augenblicke:

$$Ap, \quad Bq, \quad Cr,$$

resp. die Momentensummen der Bewegungsgrössen in Bezug auf die drei Hauptachsen. Am Ende des Zeitelements dt sind:

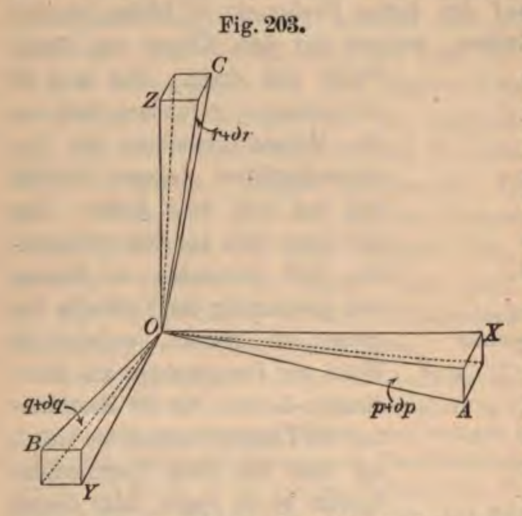
$$p + dp, \quad q + dq, \quad r + dr,$$

resp. die Drehgeschwindigkeiten um die drei Hauptachsen, folglich sind:

$$A(p + dp), \quad B(q + dq), \quad C(r + dr)$$

resp. die Werthe, welche die Momentensummen der Bewegungsgrössen in Bezug auf die drei Hauptachsen am Ende der Zeit dt erreicht haben. Zugleich ist eine unendlich kleine Lagenveränderung des beweglichen Systems der drei Hauptachsen eingetreten, und jede derselben wird am Ende des Zeitelements dt von derjenigen festen Coordinaten-Achse, mit welcher sie im Anfange dieses Zeittheilchens zusammenfiel, um einen unendlich kleinen Winkel sich entfernt haben (Fig. 203). Da es sich hier nur um eine unendlich kleine Lagenveränderung handelt, so kann man die neue Lage des Hauptachsen-Systems in der Weise bestimmen, dass man zunächst die Lagenveränderungen aufsucht, welche eine jede der drei Drehbewegungen:

Fig. 203.



$$p\,dt, \quad q\,dt, \quad r\,dt$$

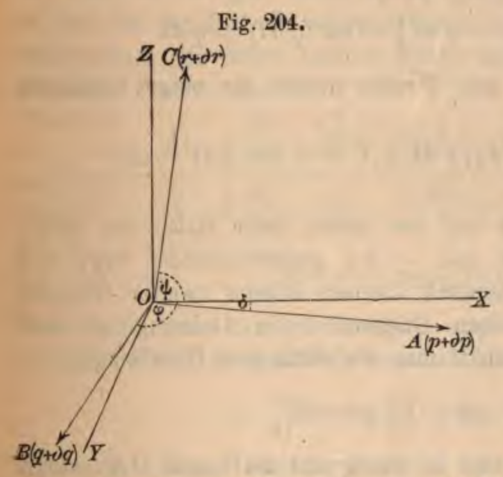
einzeln genommen zur Folge haben würde, und nachher für jede Hauptachse diese einzeln gefundenen Verschiebungen zu einer Resultirenden zusammensetzt.

Nach § 99 kann man die Momentensummen der Bewegungsgrössen, indem man dieselben als Längengrössen auf den betreffenden Achsenrichtungen von dem Punkte O aus abträgt, gerade so wie wenn es Geschwindigkeiten oder Kräfte wären, zu einer Resultirenden zusammensetzen, oder in ihre Componenten zerlegen. Um also für den Endpunkt der Zeit dt die Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf die feste Achse OX zu bestimmen, hat man eine jede von den drei in Fig. **204** angegebenen Momentensummen auf die Achse OX zu projiciren und die Summe dieser drei Projectionen zu bilden; man gelangt dann zu dem Ausdruck:

$$A(p+dp)\cos\delta + B(q+dq)\cos\varphi + C(r+dr)\cos\psi.$$

Indem man von diesem Ausdrucke die Grösse Ap subtrahirt, erhält man den Zuwachs, um welchen die Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf die feste Achse OX während der Zeit dt sich vergrössert hat, und dieser Zuwachs durch dt dividirt giebt den Differenzial-Quotienten jener Momentensumme. Nach dem in § 98 (Gleichung 5) gefundenen Satze ist dieser Differenzial-Quotient gleich der Summe der statischen Momente der wirkenden Kräfte in Bezug auf ebendieselbe Achse zu setzen.

Fig. 204.



Wenn man also mit $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ resp. diese Kraftmomentensummen in Bezug auf die drei Achsen bezeichnet, so erhält man in Bezug auf die Achse OX nunmehr die folgende Gleichung:

$$\frac{A(p+dp)\cos\delta + B(q+dq)\cos\varphi + C(r+dr)\cos\psi - Ap}{dt} = \mathfrak{L}.$$

Zur Bestimmung der Winkel δ, φ, ψ hat man das in Fig. **203**

dargestellte Verfahren anzuwenden. Der Winkel δ ist ein unendlich kleiner Winkel; folglich ist bis auf eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung genau:

$$\cos \delta = 1.$$

Der Winkel, welchen die Achsen OB und OX mit einander einschliessen, hatte im Anfange des Zeittheilchens dt die Grösse $\frac{\pi}{2}$. Für die Beiträge, welche die drei Drehgeschwindigkeiten p, q, r zu seiner Vergrösserung liefern, ergeben sich aus Fig. **203** resp. die Werthe: 0, 0, $+ r\,dt$. Folglich ist:

$$\cos \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} + r\,dt\right) = -\sin (r\,dt) = -r\,dt.$$

Der Winkel zwischen den Achsen OC und OX hatte im Anfange des Zeitelements dt ebenfalls die Grösse $\frac{\pi}{2}$. Zu seiner Vergrösserung liefern die drei Drehgeschwindigkeiten p, q, r resp. die Beiträge: 0, $-q\,dt$, 0. Folglich ist:

$$\cos \psi = \cos \left(\frac{\pi}{2} - q\,dt\right) = \sin (q\,dt) = q\,dt.$$

Nach Substitution dieser drei Werthe nimmt die obige Gleichung die folgende Form an:

$$\frac{A(p + dp) - B(q + dq)\,r\,dt + C(r + dr)\,q\,dt - Ap}{dt} = \mathfrak{L}.$$

Im Zähler des Ausdrucks auf der linken Seite fallen die beiden endlichen Glieder $+Ap$ und $-Ap$ gegen einander weg; und wenn man ferner die unendlich kleinen Glieder zweiter Ordnung neben den unendlich kleinen Gliedern erster Ordnung als verschwindend fortlässt, so erhält man die einfachere Gleichung:

$$\text{I.} \quad A\frac{dp}{dt} - (B - C)\,qr = \mathfrak{L}.$$

Durch Wiederholung des hier in Bezug auf die Achse OX erklärten Verfahrens und Anwendung desselben auf die beiden anderen Achsenrichtungen würde man zu den folgenden Gleichungen gelangen:

$$\text{II.} \quad B\frac{dq}{dt} - (C - A)\,rp = \mathfrak{M}.$$

$$\text{III.} \quad C\frac{dr}{dt} - (A - B)\,pq = \mathfrak{N}.$$

Wenn man das ganze obige Beweisverfahren für irgend einen äteren Zeitpunkt wiederholen wollte, in welchem das bewegliche stem der Hauptachsen eine andere Lage angenommen hat, so irde man sich wiederum das feste Coordinaten-System so gelegt denken haben, dass die Achsen desselben mit den neuen Richngen der Hauptachsen zusammenfallen. Die drei Grössen 𝔏, , 𝔑 würden also nunmehr die Kraftmomente in Bezug auf diese uen Achsen bedeuten. Es folgt hieraus, dass in den obigen lgemeinen Gleichungen unter den Grössen 𝔏, 𝔐, 𝔑 nicht die raftmomente in Bezug auf gewisse feste Achsenrichtungen, sonrn vielmehr die Momentensummen der wirkenden Kräfte in Bezug f die drei beweglichen Hauptachsen des rotirenden Körpers zu rstehen sind.

§ 105.

Drehung des Körpers ohne Einwirkung von Kräften.

Die im vorigen Paragraphen gefundenen drei Gleichungen hmen für den Fall, in welchem ausser dem Widerstande des festen ehpunktes gar keine äussere Kräfte auf den Körper wirken, die genden Formen an:

$$\text{I.}\quad A\frac{dp}{dt}-(B-C)qr=0,$$

$$\text{II.}\quad B\frac{dq}{dt}-(C-A)rp=0,$$

$$\text{III.}\quad C\frac{dr}{dt}-(A-B)pq=0.$$

enn man diese drei Gleichungen resp. mit den Grössen p, q, r ıltiplicirt und dann addirt, so erhält man die Gleichung:

$$Ap\frac{dp}{dt}+Bq\frac{dq}{dt}+Cr\frac{dr}{dt}=0.$$

dem man diese Gleichung integrirt, und die Integrationsconstante t h bezeichnet, gelangt man zu der Gleichung:

$$1)\quad \frac{Ap^2}{2}+\frac{Bq^2}{2}+\frac{Cr^2}{2}=h.$$

n die Bedeutung der Grösse h zu erkennen, hat man dieser Gleiung die folgende Form zu geben:

$$\frac{\omega^2}{2}\left\{A\frac{p^2}{\omega^2}+B\frac{q^2}{\omega^2}+C\frac{r^2}{\omega^2}\right\}=h$$

und darin für die Grössen $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$ die aus Fig. 202 zu entnehmenden Werthe zu substituiren; man erkennt dann, dass der eingeklammerte Ausdruck auf der linken Seite mit dem in § 102 (Gleichung 7) für das Trägheitsmoment gefundenen Ausdrucke übereinstimmt. Wenn also das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf seine augenblickliche Drehachse mit T bezeichnet wird, so zeigt die obige Gleichung in der Form:

$$2) \quad \frac{T\omega^2}{2} = h,$$

dass die Constante h die unverändert bleibende lebendige Kraft des Körpers bedeutet.

Wenn man ein anderes Mal die drei Gleichungen I, II, III resp. mit den Grössen $2Ap$, $2Bq$, $2Cr$ multiplicirt und dann addirt, so erhält man die Gleichung:

$$2A^2p\frac{dp}{dt} + 2B^2q\frac{dq}{dt} + 2C^2r\frac{dr}{dt} = 0.$$

Indem man dieselbe integrirt und die Integrationsconstante mit k^2 bezeichnet, gelangt man zu der folgenden Gleichung:

$$3) \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2.$$

Die Grössen Ap, Bq, Cr sind resp. die Momentensummen der Bewegungsgrössen in Bezug auf die drei beweglichen Hauptachsen oder in Bezug auf drei mit den augenblicklichen Richtungen derselben zusammenfallende feste Coordinatenachsen. Nach § 99 (Gleichung 8) ist also die Constante k die unverändert bleibende Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf die Achse der unveränderlichen Ebene, und die Winkel, welche die drei Hauptachsen mit der Achse der unveränderlichen Ebene einschliessen, sind zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$4) \quad \cos\mathfrak{a} = \frac{Ap}{k}, \qquad 5) \quad \cos\mathfrak{b} = \frac{Bq}{k}, \qquad 6) \quad \cos\mathfrak{c} = \frac{Cr}{k}.$$

Wenn mit ε der Winkel bezeichnet wird, welchen die Achse der unveränderlichen Ebene mit der augenblicklichen Drehachse einschliesst, so ist:

$$\cos\varepsilon = \cos\alpha\cos\mathfrak{a} + \cos\beta\cos\mathfrak{b} + \cos\gamma\cos\mathfrak{c}, \quad \text{oder:}$$

$$\cos\varepsilon = \frac{p}{\omega}\cdot\frac{Ap}{k} + \frac{q}{\omega}\cdot\frac{Bq}{k} + \frac{r}{\omega}\cdot\frac{Cr}{k}.$$

Die bei rechtwinkeliger Zerlegung der Drehgeschwindigkeit ω in die Achse der unveränderlichen Ebene fallende Componente:

$$7)\quad \omega \cos \varepsilon = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{k} = \frac{2h}{k}$$

behält also während der Bewegung stets dieselbe Grösse.

Für den in die augenblickliche Drehachse fallenden Radiusvector der Oberfläche des Trägheitsellipsoids ergiebt sich aus Fig. 200 die Gleichung:

$$\frac{1}{L} = \sqrt{T}, \quad \text{oder:} \quad \frac{\omega}{L} = \omega \sqrt{T},$$

welcher man nach Gleichung 2) auch die folgende Form geben kann:

$$8)\quad \frac{\omega}{L} = \sqrt{2h}.$$

Wenn man die Gleishung 7) durch diese letztere dividirt, so erhält man die Gleichung:

$$9)\quad L \cos \varepsilon = \frac{\sqrt{2h}}{k},$$

welche zeigt, dass auch die Projection jenes Radiusvectors auf die Achse der unveränderlichen Ebene beständig dieselbe Grösse behält.

Nach § 102 ist die Gleichung der Oberfläche des Trägheitsellipsoids in Bezug auf das Hauptachsen-System:

$$10)\quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

und wenn mit x_1, y_1, z_1 die Coordinaten desjenigen Punktes dieser Fläche bezeichnet werden, welcher zugleich in der augenblicklichen Drehachse liegt, so ist:

$$11)\quad z - z_1 = a(x - x_1) + b(y - y)$$

die Gleichung einer durch diesen Punkt gelegten Ebene. Soll diese Ebene zugleich eine Berührungsebene der Ellipsoid-Oberfläche sein, so müssen die partiellen Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$ an der Berührungsstelle für beide Flächen den gemeinschaftlichen Werth $\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$ annehmen (Fig. 205); ebenso die beiden

Fig. 206.

Fig. 205.

partiellen Differenzialquotienten $\frac{dz}{dy}$ den gemeinschaftlichen Werth $\frac{dz}{dy}$ $= \operatorname{tg} \psi$ (Fig. 206). Aus den beiden Gleichungen 10) und 11) ergeben sich für die partiellen Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$ resp. die Werthe:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{Ax}{Cz} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = a.$$

Indem man diese beiden Grössen für die Berührungsstelle einander gleichsetzt, erhält man für den Coefficienten a den Werth:

$$a = -\frac{Ax_1}{Cz_1}.$$

Auf gleiche Weise erhält man zur Bestimmung des anderen Coefficienten b die Gleichungen:

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{By}{Cz} \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dy} = b, \quad \text{also:} \quad b = -\frac{By_1}{Cz_1}.$$

Die Gleichung der Berührungsebene nimmt nach Substitution dieser Werthe die Form an:

$$z - z_1 = -\frac{Ax_1}{Cz_1}(x - x_1) - \frac{By_1}{Cz_1}(y - y_1), \text{ oder:}$$

$$Ax_1 \,.\, x + By_1 \,.\, y + Cz_1 \,.\, z = Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2.$$

Der in dieser letzteren Gleichung auf der rechten Seite stehende Ausdruck ist (nach Gleichung 10) gleich Eins; folglich ist:

$$12) \quad (Ax_1) \,.\, x + (By_1) \,.\, y + (Cz_1) \,.\, z = 1$$

die Gleichung derjenigen Ebene, welche die Oberfläche des Trägheitsellipsoids im Pole der augenblicklichen Drehachse berührt.

Um die Bedeutungen der drei eingeklammerten Coefficienten zu erkennen, hat man in der obigen Gleichung zunächst $y = 0$ und $z = 0$ zu setzen; die Coordinate x nimmt dann den Werth an:

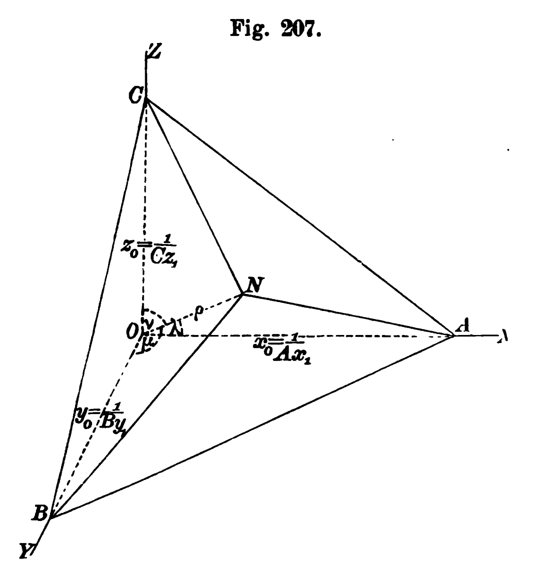
$$x_0 = \frac{1}{(Ax_1)}.$$

Der Coeffizient (Ax_1) ist also der reciproke Werth des Abstandes x_0 zwischen dem Drehpunkte O und dem Durchschnittspunkte jener Ebene mit der Achse OX. Die analogen Bedeutungen haben die beiden anderen Coefficienten in Bezug auf die beiden anderen Achsen. Es ist nämlich nach Fig. 207:

$$(Ax_1) = \frac{1}{x_0}, \quad (By_1) = \frac{1}{y_0}, \quad (Cz_1) = \frac{1}{z_0}.$$

Für die Winkel, welche das von dem Drehpunkte O auf jene Ebene gefällte Perpendikel ON mit den drei Achsen einschliesst, ergeben sich aus Fig. 207 die Gleichungen:

Fig. 207.



$$\cos\lambda = \frac{\rho}{x_0},$$

$$\cos\mu = \frac{\rho}{y_0},$$

$$\cos\nu = \frac{\rho}{z_0}.$$

Indem man die Quadrate dieser Gleichungen addirt und zugleich für die Grössen x_0, y_0, z_0 ihre Werthe substituirt, erhält man die Gleichung:

$$(\rho A x_1)^2 + (\rho B y_1)^2 + (\rho C z_1)^2 = 1, \text{ oder:}$$

$$13)\quad \rho = \frac{1}{\sqrt{(Ax_1)^2 + (By_1)^2 + (Cz_1)^2}}.$$

Nach Substitution der für die Grössen ρ, x_0, y_0, z_0 gefundenen Werthe nehmen die obigen Gleichungen für die drei Winkel λ, μ, ν nunmehr die folgenden Formen an:

$$\cos\lambda = \frac{Ax_1}{\sqrt{(Ax_1)^2 + (By_1)^2 + (Cz_1)^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{By_1}{\sqrt{(Ax_1)^2 + (By_1)^2 + (Cz_1)^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{Cz_1}{\sqrt{(Ax_1)^2 + (By_1)^2 + (Cz_1)^2}}.$$

Die Grössen x_1, y_1, z_1 sind die Coordinaten des in der Ellipsoid-Oberfläche liegenden Poles der augenblicklichen Drehachse, und die Grösse L ist der Radiusvector dieses Poles; folglich ist:

$$\frac{x_1}{L} = \cos\alpha, \quad \frac{y_1}{L} = \cos\beta, \quad \frac{z_1}{L} = \cos\gamma \quad \text{und}$$

$$\omega\cdot\frac{x_1}{L} = p, \quad \omega\cdot\frac{y_1}{L} = q, \quad \omega\cdot\frac{z_1}{L} = r.$$

Wenn man also in den oben für die Grössen cos λ, cos μ, cos ν gefundenen Gleichungen die auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke im Zähler und Nenner mit der Grösse $\frac{\omega}{L}$ multiplicirt, so erhält man die Gleichungen:

$$14)\quad \cos\lambda = \frac{Ap}{\sqrt{(Ap)^2+(Bq)^2+(Cr)^2}} = \frac{Ap}{k},$$

$$15)\quad \cos\mu = \frac{Bq}{\sqrt{(Ap)^2+(Bq)^2+(Cr)^2}} = \frac{Bq}{k},$$

$$16)\quad \cos\nu = \frac{Cr}{\sqrt{(Ap)^2+(Bq)^2+(Cr)^2}} = \frac{Cr}{k}.$$

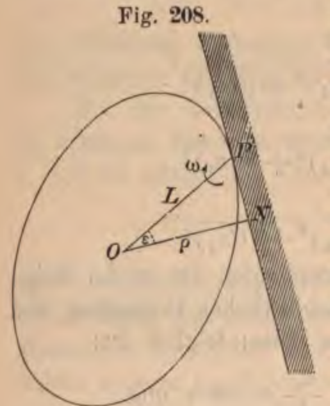
Die Vergleichung derselben mit den Gleichungen 4), 5), 6) zeigt, dass die Winkel λ, μ, ν resp. mit den Winkeln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ übereinstimmen. Die Normale der Berührungsebene fällt also stets mit der Normalen zur unveränderlichen Ebene zusammen.

Wenn man ferner den in Gleichung 13) für ρ gefundenen Ausdruck in derselben Weise behandelt, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen 8) und 9) für den Abstand der Berührungsebene von dem Drehpunkte O den constanten Werth:

$$17)\quad \rho = \frac{\omega}{Lk} = \frac{\sqrt{2h}}{k} = L\cos\varepsilon.$$

Denkt man sich die unveränderliche Ebene als feste Wandfläche im Abstande ρ vom Drehpunkte O liegend, so erkennt man, dass diese Wandfläche von der Oberfläche des Trägheitsellipsoids stets in demjenigen Punkte P der letzteren berührt wird, welcher als Pol der augenblicklichen Drehachse die Geschwindigkeit Null hat. Folglich geschieht die Drehbewegung des Körpers genau in derselben Weise, wie wenn das mit dem Körper verbundene, an der Drehbewegung desselben theilnehmende Trägheitsellipsoid auf der unveränderlichen Ebene rollt (Fig. 208).

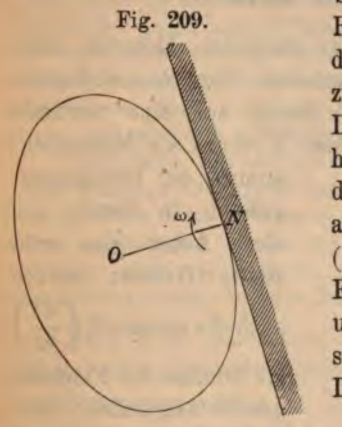
Fig. 208.



Während dieser rollenden Bewegung wird im Allgemeinen die augenblickliche Drehachse ihre Lage ändern — sowohl in Bezug auf ein festes Coordinaten-System, als auch in Bezug auf das an der Dreh-

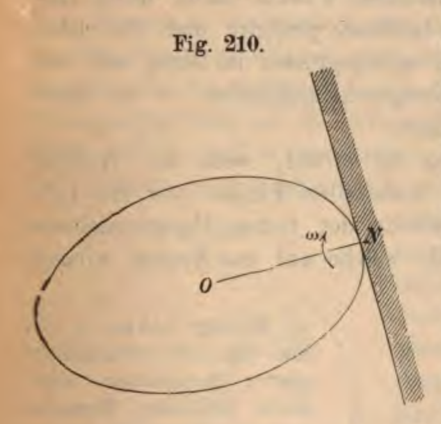
bewegung theilnehmende Hauptachsen-System im Inneren des Körpers. Nur in dem Falle, wenn die anfängliche Drehbewegung so beschaffen war, dass gleich Anfangs der Radiusvector der Berührungsstelle mit der Normalen zur unveränderlichen Ebene zusammenfiel, wird die augenblickliche Drehachse ihre Lage unverändert beibehalten. Dieser Fall tritt ein, wenn eine der drei Hauptachsen des Körpers die anfängliche Drehachse desselben bildete (Fig. **209** und Fig. **210**). In diesem Falle wird der Körper seine Drehbewegung um diese Hauptachse gleichförmig fortsetzten, wie wenn dieselbe eine feste Drehachse wäre.

Fig. 209.



Den Widerstand des festen Drehpunktes oder die Kraft, welche auf den Körper wirken muss, um eine Bewegung dieses Punktes zu verhindern, würde man nach dem Gesetze des Schwerpunktes bestimmen können, indem man die Masse des Körpers mit der augenblicklichen Beschleunigung des Schwerpunktes multiplicirt. Für den Fall, dass der Schwerpunkt selbst den Drehpunkt bildet, bedarf es gar keiner Widerstandskraft, um denselben festzuhalten, weil die Beschleunigung des Schwerpunktes in diesem Falle gleich Null ist. Wenn also die anfängliche Drehachse eines frei im Raume schwebenden Körpers eine der drei Hauptachsen des Schwerpunktes war, so setzt der Körper seine Drehbewegung um diese Achse gleichförmig fort, ohne dass es irgendwelcher Widerstandskräfte bedürfte, um die Drehachse festzuhalten. Die drei Hauptachsen des Schwerpunktes werden deshalb „freie Achsen“ genannt.

Fig. 210.

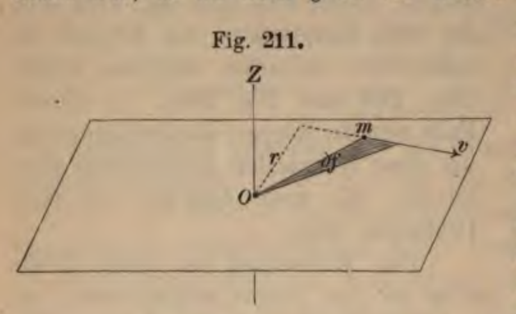


§ 106.

Anwendungen des Princips der Flächen.

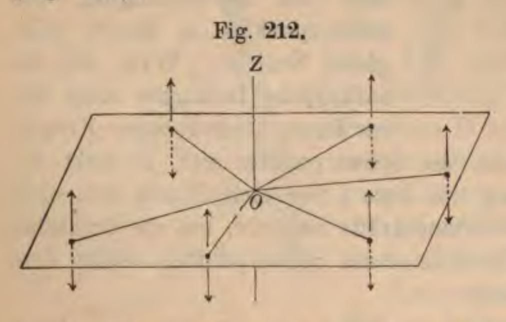
Wenn die algebraische Summe der statischen Momente aller auf ein beliebiges System von materiellen Punkten wirkenden Kräfte beständig gleich Null ist in Bezug auf eine verticale Achse OZ, so ist nach § 98 die Grösse $\Sigma(mvr)$ als Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf diese Achse eine constante Grösse; ebenso auch die Grösse $\Sigma\left(\frac{df}{dt}\right)$ als Summe der Flächengeschwindigkeiten. Man findet diese Grössen — wie in § 98 erklärt wurde — indem man die materiellen Punkte nebst ihren Geschwindigkeiten auf die Horizontalebene projicirt und für diese Projectionen die Momente der Bewegungsgrössen in Bezug auf den Drehpunkt O — resp. die Flächengeschwindigkeiten — zu einer algebraischen Summe zusammenfasst.

Fig. 211.



Die obengenannte Bedingung ist erfüllt, wenn die vertical abwärts wirkenden Gewichte der materiellen Punkte und die vertical aufwärts wirkenden Widerstände der festen Horizontalebene die einzigen äusseren Kräfte sind, welche auf das System wirken (Fig. 212).

Fig. 212.



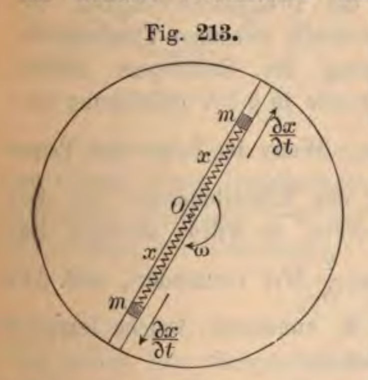
Es folgt hieraus z. B., dass ein auf vollkommen glatter horizontaler Eisfläche stehender Mensch, welcher anfangs im Ruhezustande sich befand, niemals im Stande sein wird, sich selbst eine Drehbewegung um seine verticale Achse zu ertheilen. Wenn durch die in seinem Körper thätigen inneren Kräfte bewirkt wird, dass ein Theil des Körpers eine Drehung nach rechts herum ausführt, so wird nothwendig ein anderer Theil des Körpers gleichzeitig eine Drehung nach links herum ausführen müssen. Das Gleiche würde für

eine Gesellschaft von mehreren Personen gelten. Die einzelnen Mitglieder derselben können durch Anwendung von inneren Kräften, mit welchen sie ziehend oder schiebend auf einander gegenseitig einwirken, einander sich nähern oder von einander sich entfernen; aber wie nach dem Gesetze des Schwerpunktes das Ganze niemals eine horizontale fortschreitende Bewegung annehmen kann, eben so wenig würde die Gesellschaft als Ganzes sich eine Drehbewegung um die verticale Achse ertheilen können — auch dann nicht, wenn noch äussere Kräfte hinzugezogen würden, deren Ausgangspunkte in der festen Drehachse OZ sich befinden.

Denkt man sich ein System von materiellen Punkten bestehend aus einem Menschen und irgend einem anderen Gegenstande, welchen derselbe in seinen Händen hält, so erkennt man, dass es in diesem Falle dem Menschen selbst möglich sein würde, sich eine Drehbewegung nach rechts herum zu ertheilen, und zwar dadurch, dass er dem von seinen Händen gehaltenen Gegenstande gleichzeitig eine Drehbewegung nach links herum ertheilt.

Nach § 98 (Gleichung 6) erhält man für eine um ihre feste Achse sich drehende kreisförmige Scheibe die Momentensumme der Bewegungsgrössen in Bezug auf die Drehachse, indem man das Trägheitsmoment T mit der Winkelgeschwindigkeit ω multiplicirt. Wenn an zwei gegenüber liegenden Stellen in den Abständen x von der Drehachse noch zwei materielle Punkte von den Massen m hinzugefügt werden, welche an der Drehbewegung theilzunehmen gezwungen sind, so wird dadurch das Trägheitsmoment auf die Grösse $T + 2mx^2$, und die Momentensumme der Bewegungsgrössen auf die Grösse $(T + 2mx^2)\,\omega$ vergrössert. Denkt man sich die beiden materiellen Punkte längs des Durchmessers der Scheibe verschiebbar und auf einander gegenseitig eine anziehende oder abstossende Kraft übertragend — etwa mittelst eines dieselben verbindenden elastischen Fadens oder mittelst einer zwischen denselben angebrachten gespannten Feder — so erkennt man, dass diese Kräfte als innere Kräfte die Momentensumme der Bewegungsgrössen nicht verändern können. Das Wachsen des Abstandes x bis auf die Grösse x_1 bedingt also ein Abnehmen der Winkelgeschwindigkeit ω bis auf die Grösse ω_1, welche letztere berechnet werden kann aus der Gleichung:

Fig. 213.



$$(T + 2\,mx^2)\,\omega = \text{Const.} = (T + 2\,mx_1^2)\,\omega_1.$$

Der Differenzial-Quotient dieser constanten Grösse nach der Zeit t

genommen ist gleich Null zu setzen, folglich ist:

$$(T + 2mx^2)\frac{d\omega}{dt} + 4m\omega x\frac{dx}{dt} = 0.$$

Wenn man die Grösse $\frac{dx}{dt}$ als relative Geschwindigkeit der Masse m in Bezug auf die rotirende Scheibe mit v bezeichnet, so ergiebt sich hieraus für die Winkelbeschleunigung der Werth:

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2(2mv\omega)x}{T + 2mx^2}.$$

Es hat also die Drehbeschleunigung des ganzen Systems dieselbe Grösse, wie wenn auf dasselbe ein Paar von äusseren Kräften wirkte, deren jede die Grösse $2mv\omega$ hat, also dieselbe Grösse, welche in der Theorie der relativen Bewegung für die sogenannte zweite scheinbare Kraft gefunden wurde. Da im vorliegenden Falle die Drehachse die Eigenschaften einer „freien Achse" besitzt, so würde die Bewegung auch dann noch in derselben Weise erfolgen, wenn das ganze System frei im Raume schwebend der Einwirkung aller äusseren Kräfte entzogen wäre.

Bei einer homogenen Kugel besitzt jede durch den Mittelpunkt gelegte gerade Linie die Eigenschaften einer freien Achse; folglich würde dasselbe Bewegungsgesetz auch für eine frei im Raume schwebende um ihre Achse rotirende Kugel, also z. B. die Erdkugel, gelten. Wenn durch innere Kräfte einzelne Massentheile der Erdachse genähert, also z. B. vom Aequator nach den Polen hin verschoben werden, so wächst die Drehgeschwindigkeit der Erde. Den gleichen Einfluss würde auch die mit einer Temperatur-Abnahme verbundene Zusammenziehung des Erdkörpers haben. Für das Trägheitsmoment der Kugel wurde in § 100 (Gleichung 33) der Ausdruck $T = \frac{2}{5}Mr^2$ gefunden. Wenn in Folge der Temperatur-Abnahme eine Verkleinerung des Erdhalbmessers von der Grösse r bis auf die Grösse r_1 einträte, so würde dadurch das Trägheitsmoment auf die Grösse $T_1 = \frac{2}{5}Mr_1^2$ vermindert, und die Drehgeschwindigkeit würde von ω bis ω_1 zunehmen, welche letztere Grösse zu berechnen ist aus der Gleichung:

$$T\omega = T_1\omega_1, \text{ oder: } \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{T}{T_1} = \frac{\frac{2}{5}Mr^2}{\frac{2}{5}Mr_1^2} = \frac{r^2}{r_1^2}.$$

So z. B. würde bei einer Abnahme des Erdhalbmessers von 861 Meil bis auf 860 Meilen für das dadurch bedingte Vergrösserungsverhältniss d Drehgeschwindigkeit der Werth sich ergeben:

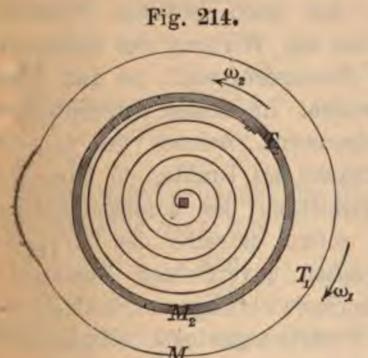
$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{861^2}{860^2} = 1 + \frac{1}{430}.$$

Es würde also die Drehgeschwindigkeit um $\frac{1}{430}$ ihrer ursprünglichen Grö zunehmen, und die Länge des Tages um $\frac{1}{430}$ oder um etwa 200 Secund abnehmen.

Die Momentensumme der Bewegungsgrössen von zwei Mass M_1, M_2, welche um eine gemeinschaftliche Drehachse nach en gegengesetzten Richtungen sich drehen, kann nicht verändert we den durch Kräfte, welche die beiden Massen auf einander gege seitig ausüben. Wenn also das Ganze anfangs im Ruhezustan sich befand, so werden die später eingetretenen Drehgeschwindi keiten ω_1 und ω_2 der Bedingungsgleichung unterworfen sein:

$$T_1 \omega_1 - T_2 \omega_2 = 0, \text{ oder:}$$
$$T_1 \omega_1 = T_2 \omega_2,$$

Fig. 214.



in welcher T_1, T_2 resp. die Trä heitsmomente der beiden Massen Bezug auf ihre gemeinschaftliche Dre achse bedeuten.

Solche entgegengesetzte Dre bewegungen würden die beiden Kö per einander gegenseitig z. B. ve mittelst einer gespannten elastisch Spiralfeder ertheilen können, der inneres Ende an dem ersten u deren äusseres Ende an dem zweiten Körper befestigt ist. U das Gesetz dieser Drehbewegungen zu finden, würde man die ob gefundene Gleichung nach der Zeit t zu differenziiren haben; m erhält dann die Gleichung:

$$T_1 \frac{d\omega_1}{dt} = T_2 \frac{d\omega_2}{dt}.$$

Die beiden hier einander gleich gesetzten Producte sind die Au drücke für die Kraftmomente $\mathfrak{M}$, welche den beiden Körpern ih Drehbeschleunigungen ertheilen und vermittelst der Spiralfeder a sie übertragen werden; dieselben bilden in entgegengesetztem Sin genommen zugleich die Kraftmomente, welche die gespannte Spir

feder im Gleichgewichtszustande erhalten würde. Wenn also das Gesetz bekannt ist, nach welchem mit eintretender Ab- oder Aufwickelung der Spiralfeder die Grösse des Kraftmoments $\mathfrak{M}$ sich ändert, so würde man daraus das Gesetz für jede der beiden Drehbewegungen auf ähnliche Weise wie bei dem im nächstfolgenden Paragraphen behandelten Falle ableiten können.

§ 107.

Torsionspendel.

Anstatt den Elasticitätswiderstand einer gespannten Spiralfeder zu benutzen, um einem Körper eine Drehbewegung zu ertheilen, würde man auch den Torsionswiderstand eines Drahtes dazu verwenden können, dessen eine Endfläche festgehalten wird, während die andere Endfläche mit dem Körper verbunden ist, welchem eine Drehbewegung um die Achse des Drahtes mitgetheilt werden soll. Wenn der Körper — und mit demselben zugleich die eine Endfläche des cylindrischen Drahtes — um einen gewissen Winkel gedreht wurde, und der Körper alsdann der Wirkung des dadurch hervorgerufenen Torsionswiderstandes überlassen wird, so hat das auf den Körper übertragene Kraftmoment im ersten Augenblicke dieselbe Grösse, wie dasjenige Kraftmoment, welches bei dieser neuen Lage den Körper oder die Endfläche des Drahtes im Gleichgewicht halten würde. Die Drehungsrichtung des Kraftmomentes ist jedoch die entgegengesetzte, in sofern dasselbe den Körper nach seiner früheren — dem natürlichen unverdrehten Zustande des Drahtes entsprechenden — Gleichgewichtslage zurücktreibt. In dem Maasse, wie dadurch der Verdrehungswinkel allmählich verkleinert wird, vermindert sich nach einem bestimmten Gesetze auch die Grösse des treibenden Kraftmoments. Es soll angenommen werden, dass die Grösse des Kraftmoments stets proportional ist der Grösse des Verdrehungswinkels, was bei geringer Grösse des letzteren immer vorausgesetzt werden darf. Wenn also mit

$$1)\quad \mathfrak{M} = 2Kl$$

das Kraftmoment bezeichnet wird, welches bei dem Verdrehungswinkel θ den Körper im Gleichgewichtszustande halten würde, und mit $\mathfrak{M}_1$ das dem Winkel θ_1 entsprechende Kraftmoment, so findet jenes Gesetz seinen Ausdruck in der Gleichung:

$$2)\quad \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_1} = \frac{\theta}{\theta_1}, \text{ oder: } \mathfrak{M} = \left(\frac{\mathfrak{M}_1}{\theta_1}\right)\theta = C\theta,$$

in welcher die Constante $C = \frac{\mathfrak{M}_1}{\theta_1}$ die Grösse des Kraftmoments bezeichnet, welches dem Verdrehungswinkel $\theta = 1$ entspricht.



Fig. 215.

Wenn mit T das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die mit der Achse des Drahtes zusammenfallende Drehachse desselben bezeichnet wird, so erhält man — unter Voraussetzung einer verschwindend kleinen Masse des Drahtes — nach Fig. **215** und Fig. **216** für die Winkelbeschleunigung des Körpers die Gleichung:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{2Kl}{T} = -\frac{C\theta}{T}.$$

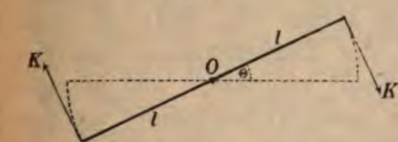


Fig. 216.

Der Quotient $\frac{C}{T}$ ist eine während der Bewegung unverändert bleibende Grösse, und wenn abkürzungsweise die Constante:

$$3)\quad \sqrt{\frac{C}{T}} = k$$

gesetzt wird, so nimmt der Ausdruck für die Winkelbeschleunigung die folgende Form an:

$$4)\quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k^2\theta.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Schwingungen des Torsionspendels nach demselben Gesetze erfolgen, welches in § 35 für geradlinige Schwingungen gefunden wurde. Für die Grössen θ und $\frac{d\theta}{dt}$ ergeben sich hieraus (auf dieselbe Weise wie in § 35 für die Grössen x und $\frac{dx}{dt}$) die allgemeinen Gleichungen:

$$\theta = A \sin kt + B \cos kt, \quad \frac{d\theta}{dt} = Ak \cos kt - Bk \sin kt,$$

in welchen die Constanten A und B aus dem anfänglichen Bewegungszustande des schwingenden Körpers zu bestimmen sind. Wenn im Anfange $\theta = \alpha$ und $\frac{d\theta}{dt} = 0$ war, so ist $A = 0$ und $B = \alpha$

zu setzen; folglich wird in diesem Falle:

$$\theta = \alpha \cos kt \text{ und } \frac{d\theta}{dt} = -\alpha k \sin kt.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, dass $\theta = -\alpha$ und $\frac{d\theta}{dt} = 0$ wird, wenn $kt = \pi$, oder: $t = \frac{\pi}{k}$ geworden ist. Nach Substitution des für die Constante k aus Gleichung 3) zu entnehmenden Werthes erhält man also für die Schwingungsdauer des Torsionspendels die Gleichung:

$$5)\quad t = \pi\sqrt{\frac{T}{C}}.$$

Wenn an jedem der beiden im Abstande a von der Drehachse einander symmetrisch gegenüber liegenden Punkte noch eine Masse m hinzugefügt wird, welche klein genug ist, um als materieller Punkt gelten zu können (Fig. 217), so wird dadurch das Trägheitsmoment um die Grösse $2ma^2$ vergrössert, und es entsteht ein neues Torsionspendel von der Schwingungsdauer:

Fig. 217.

$$6)\quad t_1 = \pi\sqrt{\frac{T + 2ma^2}{C}}.$$

Die beiden Gleichungen 5) und 6) können zur Bestimmung der beiden Constanten T und C benutzt werden, sobald die Grössen t, t_1, m, a aus directen Messungen bekannt sind. Man erhält durch Auflösung jener beiden Gleichungen für T und C die Werthe:

$$7)\quad T = \frac{2ma^2t^2}{t_1^2 - t^2}, \qquad 8)\quad C = \frac{2ma^2\pi^2}{t_1^2 - t^2}.$$

Wenn z. B. aus den Beobachtungen sich ergeben hätte, dass für das ursprüngliche Torsionspendel die Schwingungsdauer $t = 12$ Secunden war, und dass durch Hinzufügung der Masse $m = 0{,}1$ Kil. an jeder Seite im Abstande $a = 0^m{,}5$ die Schwingungsdauer bis auf die Grösse $t_1 = 13$ Secunden sich vergrösserte, so würden sich daraus die Werthe ergeben:

$$T = \frac{2 \,.\, 0{,}1 \,.\, 0{,}5^2 \,.\, 12^2}{13^2 - 12^2} = 0{,}288, \quad C = \frac{2 \,.\, 0{,}1 \,.\, 0{,}5^2 \,.\, 3{,}14^2}{13^2 - 12^2} = 0{,}019\,789\,2.$$

Die gefundenen beiden Zahlenwerthe beziehen sich auf dasjenige Maass-System, bei welchem die Masse eines Körpers, der 1 Kilogramm wiegt, als Masseneinheit, und die Kraft, welche dieser Masse eine Beschleunigung von 1 Meter ertheilen würde, als Krafteinheit zum Grunde gelegt wird. Wenn statt dessen eine g-mal so grosse Kraft, nämlich das Gewicht eines Kilogramms, als Krafteinheit betrachtet werden soll, so ist als Masseneinheit eine Masse von g Kilogrammen zu wählen. Es sind also die gefundenen Zahlen noch durch g zu dividiren, wenn die Grössen T und C nach diesem letzteren Maass-Systeme durch Zahlen ausgedrückt werden sollen, und man erhält dann die Werthe:

$$T = 0{,}029\,358, \qquad C = 0{,}002\,012\,15.$$

§ 108.

Bestimmung der Erdmasse mittelst der Torsionswage.

Das Torsionspendel kann auch als Wage benutzt werden zur Messung von sehr kleinen Kräften, so z. B. zur Messung der Anziehungskräfte, mit welchen nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze zwei homogene kugelförmige Massen m und M bei gegebenem Abstande ihrer Mittelpunkte einander gegenseitig anziehen. Zu diesem Zwecke hat man an jedem der beiden Endpunkte einer sehr leichten horizontalen Stange, welche in ihrem Mittelpunkte an einem langen dünnen Drahte aufgehängt ist, eine Kugel von der Masse m zu befestigen (Fig. 218), und hierauf, wie Fig. 219 als Grundriss zeigt, zwei kugelförmige Massen M zu diesem Torsionspendel in eine solche Lage zu bringen, dass die beiden von den Massen M auf die Massen m ausgeübten horizontalen Anziehungskräfte K rechtwinkelig zu der Stange in einerlei Drehungsrichtung wirkend ein verdrehendes Kräftepaar bilden vom Momente:

$$\mathfrak{M} = 2\,Kl.$$

Die Grösse der Kraft K würde alsdann nach den im vorigen Paragraphen gefundenen Gleichungen aus der beobachteten Grösse desjenigen Verdrehungswinkels α berechnet werden können, bei welchem jenes Kräftepaar das Torsionspendel im Gleichgewichtszustande erhält. Da indessen dieser Winkel α unter gewöhnlichen Verhältnissen so klein sein wird, dass eine directe Messung desselben mit zu grossen Schwierigkeiten verbunden sein würde, so ist es vorzuziehen, die Bestimmung desselben auf folgende indirecte Weise auszuführen.

In dem Augenblicke, wo die beiden Massen M in ihre Stellungen eingerückt beginnen ihre Wirkung auf das bis dahin ruhende

20*

Torsionspendel auszuüben, hört die bisherige Lage desselben auf, eine Gleichgewichtslage zu sein. An Stelle derselben wird nunmehr die um den Winkel α von der ursprünglichen abweichende Lage die neue Gleichgewichtslage bilden. Das Pendel wird daher in diesem Augenblicke seine erste Schwingung beginnen und nach Vollendung derselben um den Winkel α über die neue Gleichgewichtslage hinausgegangen sein, also um den Winkel 2α von der ursprünglichen Gleichgewichtslage sich entfernt haben.

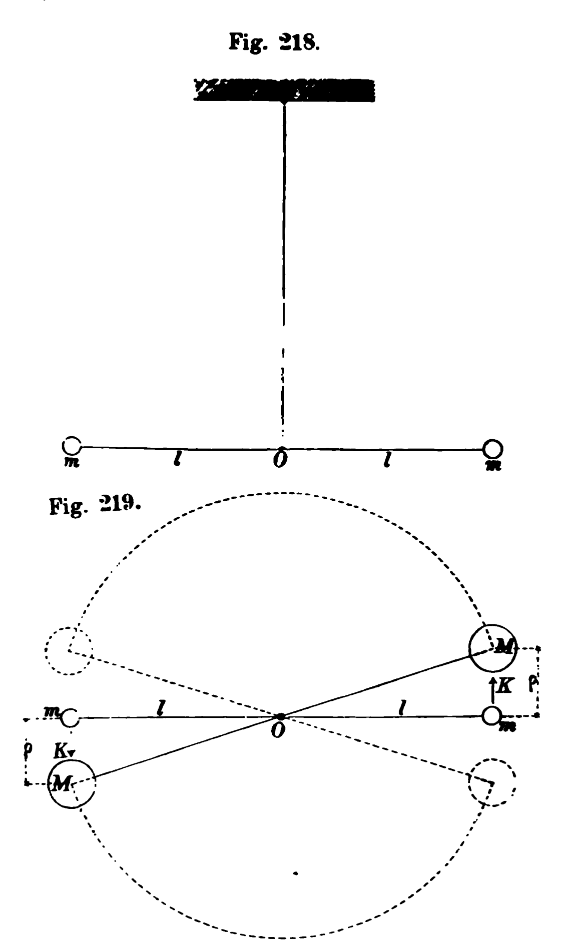


Fig. 218.

Fig. 219.

Wenn genau zu derselben Zeit — also nach Ablauf eines Zeitraums, welcher der vorher schon aus Beobachtungen bekannten Schwingungsdauer genau gleich ist — die anziehenden Massen M plötzlich in eine solche Lage übergeführt werden, bei welcher das durch die Anziehungskräfte K gebildete Kräftepaar in einer der vorherigen entgegengesetzten Drehungsrichtung wirkt, so entsteht wiederum eine neue Gleichgewichtslage für das Pendel, und zwar wird dieselbe nunmehr um den Winkel α nach der entgegengesetzten Seite hin von der ursprünglichen abweichen, folglich um den Winkel 3α von derjenigen Lage, welche das Pendel am Ende der ersten Schwingung wirklich erreicht hatte.

Das Pendel wird in diesem Augenblicke umkehrend seine zweite Schwingung beginnen, und da es im Anfange derselben um den Winkel $3\,\alpha$ von seiner neuen Gleichgewichtslage entfernt war, so wird es um den Winkel $3\,\alpha$ über dieselbe hinausgehend am Schlusse der zweiten Schwingung um den Winkel $4\,\alpha$ von der ursprünglichen Gleichgewichtslage sich entfernt haben.

Indem man auf diese Weise fortfährt, in Zeitintervallen, welche genau die Grösse der vorher beobachteten Schwingungsdauer haben, die anziehenden Massen M abwechselnd von der einen und von der anderen Seite her ihre Wirkung auf das Pendel ausüben zu lassen, erreicht man, dass der Schwingungswinkel derselben sich allmählich vergrössert, in solcher Weise, dass am Ende jeder folgenden Schwingung die Abweichung von der ursprünglichen Gleichgewichtslage um $2\,\alpha$ grösser wird, als am Ende der vorhergehenden. Es wird also am Ende der n-ten Schwingung die Abweichung von der Gleichgewichtslage die Grösse:

$$\delta = 2\,n\,\alpha$$

erreicht haben, und wenn es gelingt, diesen Winkel δ direct zu messen, so kann der Winkel α aus obiger Gleichung berechnet werden.

Unter gewöhnlichen Verhältnissen wird der Winkel δ, obgleich derselbe ein Vielfaches des Winkels α ist, selbst bei grosser Anzahl der ausgeführten Schwingungen immer noch ein sehr kleiner Winkel sein. Unter dieser Voraussetzung ist es zulässig, die Anziehungskraft K, welche in Wirklichkeit mit dem Abstande ρ zwischen den Massen M und m beständig sich ändert, als eine während jeder Schwingung constant bleibende Kraft zu betrachten.

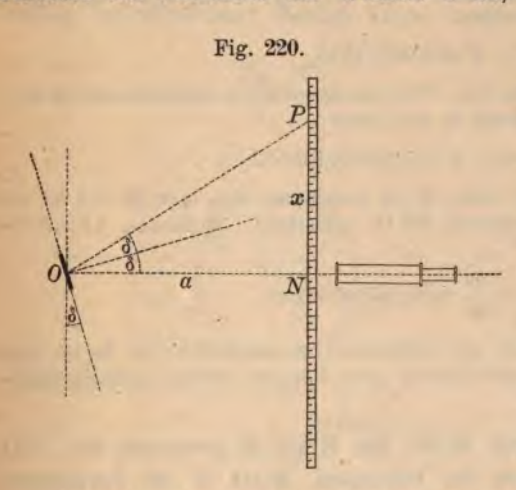


Fig. 220.

Die Messung des Winkels δ kann auf die in Fig. 220 angedeutete Weise mittelst eines aus Spiegel, Scala und Fernrohr bestehenden Apparates ausgeführt werden. Der mit dem Torsions-

pendel um die Achse desselben sich drehende Spiegel ist in solcher Weise an dem Pendel befestigt, dass die Drehachse in die Spiegelebene fällt. Das auf den Spiegel gerichtete horizontale Fernrohr und die in gleicher Höhe mit dem Mittelpunkte der Spiegelebene im Abstande a von der Drehachse aufgestellte horizontale Scala haben eine solche Lage, dass bei der ursprünglichen Gleichgewichtslage des Pendels das Auge des durch das Fernrohr schauenden Beobachters das Spiegelbild des Nullpunktes der Scala im Mittelpunkte des Gesichtsfeldes erblickt. Wenn am Ende der n-ten Schwingung statt des Nullpunktes N der im Abstande x von demselben befindliche Punkt P der Scala im Mittelpunkte des Gesichtsfeldes erschien, so ist der Winkel δ zu bestimmen aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg}(2\,\delta) = \frac{x}{a}.$$

Wenn z. B. der Abstand $a = 4^m$ war, und am Ende der 100-sten Schwingung die Grösse $x = 0^m{,}02$ beobachtet wurde, so ist:

$$\operatorname{tg}(2\,\delta) = \frac{0{,}02}{4} = 0{,}005, \quad \text{also } \delta = 0{,}0025 \quad \text{und}$$

$$\alpha = \frac{\delta}{2\,.\,100} = 0{,}000\,012\,5.$$

Wenn ferner für die Constante C der im vorigen Paragraphen berechnete Zahlenwerth:

$$C = 0{,}002\,012\,15$$

gefunden wurde, so hat das dem Verdrehungswinkel α entsprechende Kraftmoment (nach § 107, Gleichung 2) die Grösse:

$$\mathfrak{M} = C\,.\,\alpha = 0{,}000\,000\,025\,152.$$

Um hieraus die Grösse der Kraft K zu berechnen, hat man $\mathfrak{M} = 2\,Kl$ zu setzen und die Gleichung alsdann für K aufzulösen. Wenn also $2\,l = 0^m{,}4$ war, so ist:

$$K = \frac{\mathfrak{M}}{2\,l} = 0{,}000\,000\,062\,88,$$

wobei das Gewicht von 1 Kil. als Krafteinheit zu betrachten ist. Es ist also die Kraft K so gross, wie das Gewicht eines Körpers, welcher 0,062 88 Milligramm wiegt.

Nachdem auf solche Weise die Kraft K gemessen ist, mit welcher die Masse m von der bekannten Masse M bei bekanntem Abstande ρ angezogen wird, bedarf es zur Bestimmung der Erdmasse E nur noch einer Wägung der Masse m. Denn wenn mit Q das Gewicht der Masse m bezeichnet wird, oder die Kraft,

welcher dieselbe von der Erdmasse bei dem Abstande $r =$)000^m angezogen wird, und mit μ die Anziehungskraft, mit ıer zwei Massen von der Grösse Eins bei dem Abstande Eins ›inander wirken, so ergeben sich aus dem Newton'schen Gravi- ısgesetze die Gleichungen:

$$K = \mu \frac{mM}{\rho^2}, \quad Q = \mu \frac{mE}{r^2}, \quad \text{also:} \quad \frac{E}{M} = \frac{Q}{K} \cdot \frac{r^2}{\rho^2},$$

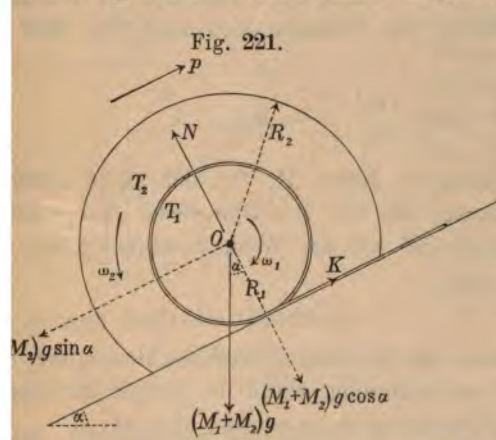
welchen das Verhältniss der Erdmasse E zu der bekannten ›e M berechnet werden kann, da die in der letzteren Gleichung der rechten Seite stehenden Grössen nunmehr sämmtlich als be- t zu betrachten sind.

§ 109.

Beschleunigtes Berganrollen auf schiefer Ebene.

Denkt man sich das in Fig. 214 dargestellte Massensystem eine schiefe Ebene gesetzt, so erkennt man die Möglichkeit, — obwohl die treibenden Drehkräfte, welche die beiden ›en M_2 und M_2 mittelst der gespannten Spiralfeder auf ein- r gegenseitig übertragen, in Bezug auf das ganze System als ›re Kräfte zu betrachten sind — doch eine bergan gerichtete hleunigung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes durch die- ›n hervorgebracht werden kann, insofern ausser dem Gewichte des Massensystems und dem normalen Gegendrucke der schiefen Ebene hier noch der dem Gleiten an der Berührungsstelle entgegenwirkende Reibungswiderstand als eine bergan wirkende äussere Kraft hinzutritt.

Fig. 221.



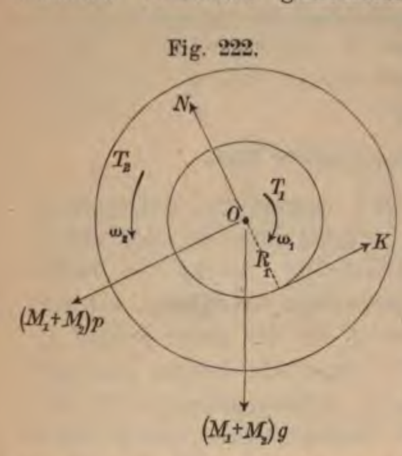
Wenn der Reibungswiderstand — hier vorausgesetzt wird — ausreicht, das Gleiten an der Be- ungsstelle zu verhindern, so wirkt derselbe wie ein um den ›nden Kreis gewickelter Faden, welcher längs der schiefen Ebene

ausgestreckt mit seinem oberen Endpunkte an derselben befestigt ist. Aus dem Gesetze des Schwerpunktes ergiebt sich für die Beschleunigung des Schwerpunktes nach Fig. 221 die Gleichung:

$$1)\quad p = \frac{K - (M_1 + M_2)\, g \sin \alpha}{M_1 + M_2}.$$

Die relativen Bewegungen der beiden Massen in Bezug auf den mit der Beschleunigung p fortschreitenden Raum sind Drehungen um die in Bezug auf diesen Raum in relativem Ruhezustande befindliche gemeinschaftliche Drehachse O. Nach der Theorie der relativen Bewegung hat man, um diese relativen Bewegungen des Massensystems zu bestimmen, in einer der Beschleunigung p entgegengesetzten Richtung die Kraft $(M_1 + M_2)p$ hinzuzufügen und alsdann den beschleunigten Raum als im Ruhezustande befindlich zu betrachten. Auf die Drehungen des Massensystems um die nunmehr als fest zu betrachtende gemeinschaftliche Drehachse O kann also jetzt das in § 98 (Gleichung 5) gefundene Gesetz angewendet werden, aus welchem sich nach Fig. 222 die Gleichung ergiebt:

Fig. 222.



$$2)\quad T_1 \frac{d\omega_1}{dt} - T_2 \frac{d\omega_2}{dt} = -KR_1.$$

Die Drehbewegung, welche die Masse M_2 für sich allein ausführt, geschieht unter Einwirkung des von der Spiralfeder auf dieselbe übertragenen Kraftmoments $\mathfrak{M}$ mit der Winkelbeschleunigung:

$$3)\quad \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{\mathfrak{M}}{T_2}.$$

Für den rollenden Kreis ist die seiner Drehbeschleunigung entsprechende Peripherie-Beschleunigung gleich der bergan gerichteten Beschleunigung seines Mittelpunktes zu setzen; also ist:

$$4)\quad R_1 \frac{d\omega_1}{dt} = p.$$

Aus den obigen vier Gleichungen können die vier unbekannten

en $\frac{d\omega_1}{dt}$, $\frac{d\omega_2}{dt}$, p, K bestimmt werden, und man erhält für eschleunigung des Berganrollens die Gleichung:

$$5)\quad p = \frac{\frac{\mathfrak{M}}{R_1} - (M_1 + M_2) g \sin \alpha}{M_1 + M_2 + \frac{T_1}{R_1^2}},$$

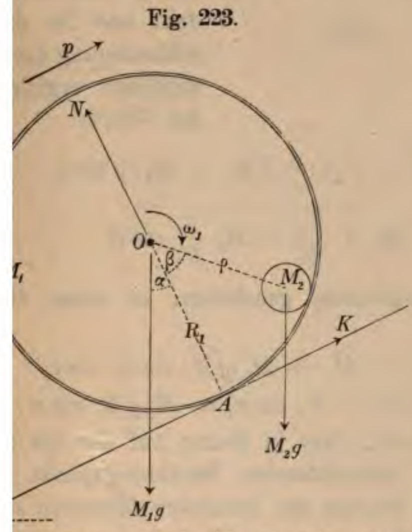
velcher sich ergiebt, dass die Beschleunigung Null wird, wenn

$$6)\quad \mathfrak{M} = (M_1 + M_2) R_1 g \sin \alpha$$

und dass die Bewegung eine beschleunigte oder verzögerte ist, hdem das in der Feder steckende Kraftmoment grösser oder er ist als der obige Werth.

Ein beschleunigtes Berganrollen würde man auch auf die in 223 angedeutete Weise hervorbringen können, bei welcher durch die zwischen den beiden Theilen M_1 und M_2 des ganzen Massensystems thätigen inneren Kräfte — z. B. durch menschliche oder thierische Kräfte oder auch mittelst eines Uhrwerks — bewirkt wird, dass die Masse M_2 im Inneren des rollenden Hohlcylinders stets in derselben relativen Höhe in Bezug auf die Achse desselben erhalten wird. Für die Beschleunigung des Schwerpunktes erhält man hier m vorigen Falle die Gleichung:

Fig. 223.



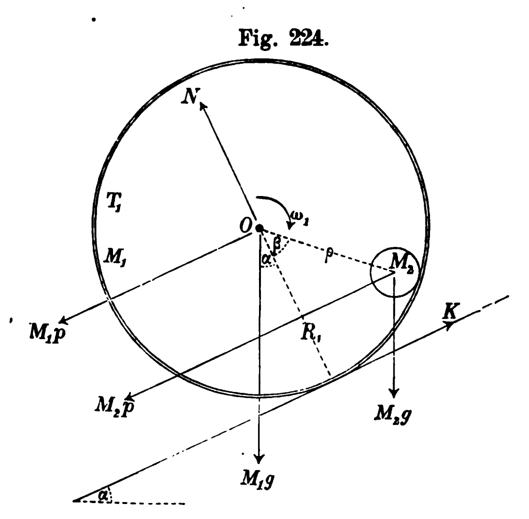
$$7)\quad p = \frac{K - (M_1 + M_2) g \sin \alpha}{M_1 + M_2}.$$

Nach Hinzufügung der Kräfte $M_1 p$ und $M_2 p$ kann man wie vorigen Falle die Achse O als eine feste Drehachse behandeln das in § 98 (Gleichung 5) gefundene Gesetz anwenden. In ksichtigung des Umstandes, dass hier — abweichend vom

vorigen Falle — nur die Masse M_1 eine Drehbewegung ausführt, erhält man nach Fig. 224 die Gleichung:

$$8)\quad T_1 \frac{d\omega_1}{dt} + 0 = M_2 g\, \rho \sin(\alpha + \beta) + M_2 p\, \rho \cos\beta - K R_1.$$

Fig. 224.



Wenn man zu diesen beiden noch wie beim vorigen Falle die Gleichung:

$$9)\quad R_1 \frac{d\omega_1}{dt} = p$$

als dritte hinzufügt, so können die drei unbekannten Grössen p, K und $\frac{d\omega_1}{dt}$ aus denselben berechnet werden, und für die Beschleunigung des Berganrollens ergiebt sich der Werth:

$$10)\quad p = \frac{M_2 g \frac{\rho}{R_1} \sin(\alpha + \beta) - (M_1 + M_2) g \sin\alpha}{M_1 + M_2 + \frac{T_1}{R_1^2} - M_2 \frac{\rho}{R_1} \cos\beta}.$$

Soll das Berganrollen gleichförmig geschehen, so muss die Bedingungsgleichung:

$$M_2 g\, \rho \sin(\alpha + \beta) = (M_1 + M_2) g R_1 \sin\alpha, \text{ oder:}$$

$$11)\quad M_2 g \,\{\rho \sin(\alpha + \beta) - R_1 \sin\alpha\} = M_1 g R_1 \sin\alpha$$

erfüllt sein, welche ausdrückt, dass in Bezug auf den als augenblicklichen Drehpunkt zu betrachtenden Berührungspunkt A (in Fig. 223) die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher Kräfte gleich Null ist.

Leipzig. Druck von Grimme & Trömel.









